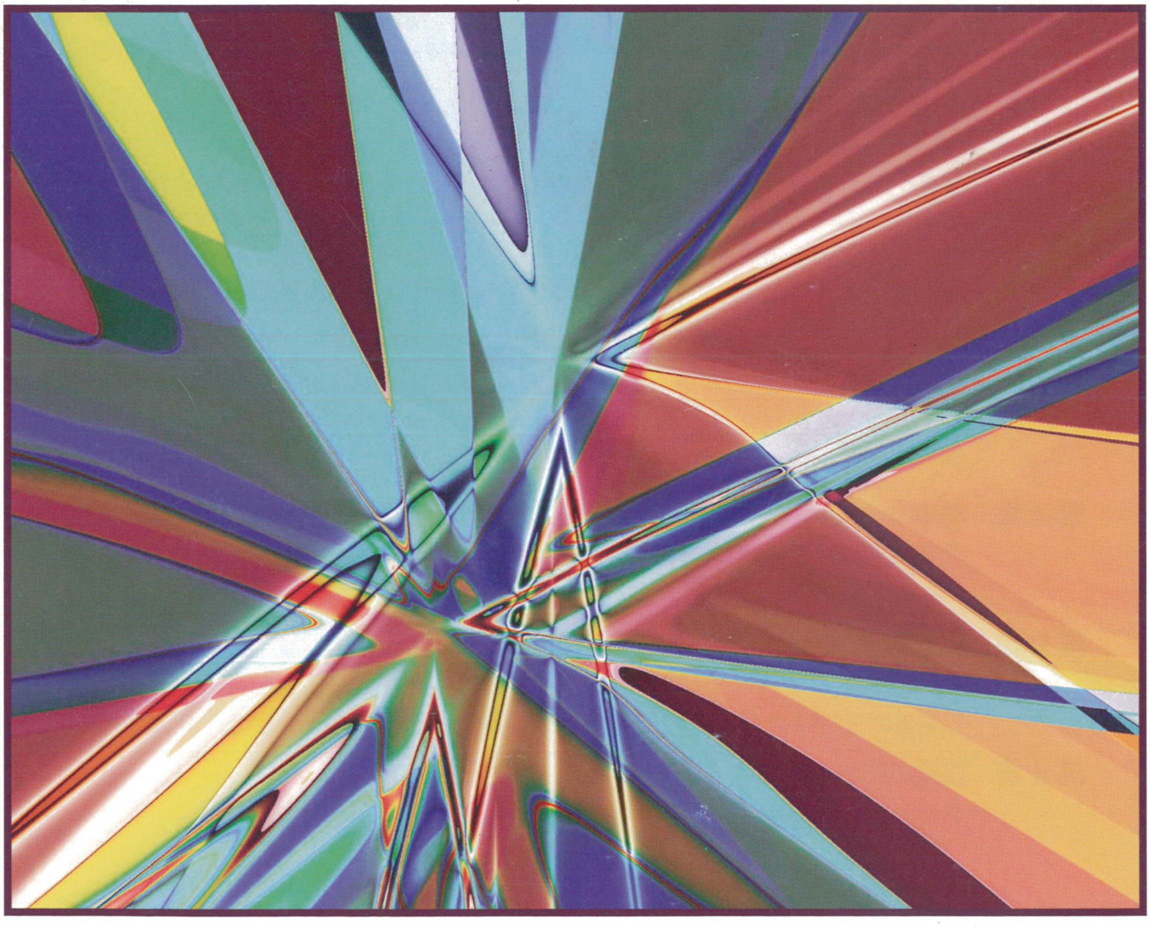
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2010年7月1日発行　第48巻7号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

7
2010

特集 物理学と行列
自然認識に果たす多彩な役割



No.565

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 565 July 2010

物理学と行列
自然認識に果たす多彩な役割

表紙：戸川　隼人

数理科学特集一覧

63年/7～2007年/5 省略
2007年/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式

数理科学臨時別冊一覧

08年/9 物理のためのリー群とリー代数
08年/11 量子暗号理論の展開
09年/1 量子力学の考え方
09年/7 ゲージ理論の発展
09年/9 量子コンピュータの基礎［第2版］
09年/11 重点解説 基礎微分幾何
09年/12 ε–δ 論法再入門
10年/1 多彩な量子の世界
10年/3 超関数・フーリエ変換入門
10年/5 問題例で深める物理
10年/6 非線形現象と微分方程式

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

July 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 565

特集／物理学と行列

行列の面白さと奥深さ

坂井 典佑

今回の特集では物理学における行列の使われ方を様々な側面から探っていく．本稿では3つの例をとって，身近な使い方から出発して，行列の奥深い意味へと進化していく一端に触れてみたい．

1. 回転を行列で表す

2次元面内の**回転**では，角度 θ_1, θ_2 と2回続けて回転を施した場合に，どちらの回転を先に行っても，$\theta_1 + \theta_2$ という角度だけ回転するので，同じ結果になる．しかし，3次元空間での回転の場合には，こうはいかない．簡単な例を示すために，図1のように，半径1の球面を考え，z 軸上の北極点 $(0,0,1)$ に，x 軸周りの $90°$ 回転 R_x と y 軸周りの $90°$ 回転 R_y とを次々に施すことを考えてみよう．R_x を先に施すと北極点は y 軸上の点 $(0,-1,0)$ に移る．R_y を次に施しても点 $(0,-1,0)$ は y 軸上だから動かない．一方，R_y を先に施すと北極点は x 軸上の点 $(1,0,0)$ に移る．R_x を次に施しても点 $(1,0,0)$ は x 軸上だから動かない．したがって，2つの回転のどちらを先に施すかで，北極点の行き先は y 軸上の点 $(0,-1,0)$ になるか，x 軸上の点 $(1,0,0)$ になるか，結果が異なる．3次元回転は3行3列の行列で表現できるが，2つの結果が異なるというのは，行列の積が順序を入れ替えると異なる結果になるということに他ならない．

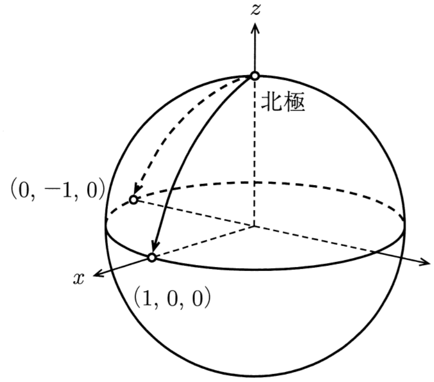


図1 球面上の点を x 軸周りの回転 R_x，y 軸周りの回転 R_y で動かした結果はどちらの回転を先にするかで結果が異なる．

$$R_y R_x \neq R_x R_y. \qquad (1)$$

このように，行列という量の一つの重要な性質は，それらの積が交換しないということである．一般に**非交換**な量の代表格が**行列**である．

2. 量子力学と行列

行列が単に線型方程式の解を求めたり，直線や平面の幾何学，さらには回転などの具体的な記述

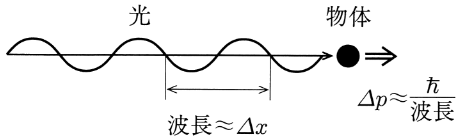


図 2　光を当てて物体の位置を測ると，必然的に物体の運動量は変化して誤差を生じる．

に役立つだけではなく，そこから一段抽象化の度合いを深めると，現代物理学の記述に不可欠な役割を果たすようになる．

非可換という行列の性質が，物理学では**量子力学**の建設に大きな役割を果たした．量子力学の一つの重要な性質として，**不確定性関係**がある．ハイゼンベルグが思考実験で確立したように，物体の位置を観測するには何らかの実験操作が必要である．もっとも良く用いられる観測手段は，図 2 のように光を当てることである．しかし，光は有限の波長を持つので，その波長よりも精密に物体の位置を観測することは原理的にできない．その一方で，波は粒子としての性質も持っており，波長の逆数に比例する運動量を持つことが実験的に確認されている．したがって，位置を精密に測定しようとして，当てる光の波長を短くすればするほど，大きな運動量を持った光が物体にぶつかるので，物体に大きな運動量を与える結果となる．これがハイゼンベルグの考えた不確定性関係である．量子力学では，座標と運動量が**非可換**な演算子であるという原理から，不確定性関係は数学的に精密に導かれる[1)]．

$$xp \neq px. \tag{2}$$

一つの数学的な定式化としては，座標も運動量も行列で表され，その結果，行列が非可換なためにこうした現象が生じることになる．これがハイゼンベルグの行列力学の立場であった．

3. 行列と非可換時空

現代物理学の様々な分野で，行列は重要な役割を果たしている．その一つの例として，行列が自然界の記述により深い役割を果たす可能性が指摘されている．重力を含む基本相互作用の統一理論として，最も有力な候補が超弦理論である．重力理論を含む矛盾のない量子論としては，ほとんど唯一と言ってよいかもしれない．この研究の中から，時空そのものが実は非可換である可能性が提起されている[2)]．**非可換時空**とは，例えば，x 座標と y 座標は量子力学でも可換であり，その結果，同時に観測が可能である．

$$xy = yx. \tag{3}$$

しかし，超弦理論の近年の研究の進展の中から，ある状況では，どうしても x, y 座標が非可換にならざるを得ないことがわかってきた．例えば，ある特別な外場が掛かっていると，弦の位置座標変数 x, y が非可換になってしまう．

このような非可換座標は，実は地上の固体物理の例でも似た例が生じているので，それとの類似を考える．電子に一様な磁場を掛け，それに垂直に電子が動く場合を考えよう．電子が動くと，磁場によって曲げられる．一様磁場の下での電子の運動は古典電磁気学で厳密に解け，図 3 のように，電子は同じ場所で回転するだけで，遠くへは行かない．回転する場所は，初めの時刻の電子の x, y 平面内の位置と速度に応じて決まる．量子力学で一様磁場だけがある場合に，電子の振舞いを求めると，この古典論に対応して，電子の波動関数は磁場の強さで決まるある範囲に局在する．この事実を演算子として表現すると，x, y 方向の運動量が互いに非可換になる．この結果が得られる原因は，磁場を表現するゲージポテンシャルが空間座

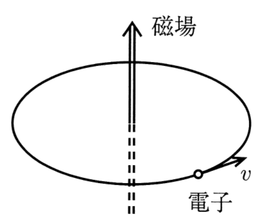


図 3　磁場だけがあると電子は同じ場所で回転し続ける．

標に依存しているため，ゲージ不変な運動量には，空間座標依存性が生じ，その結果，x, y 方向の運動量は互いに非可換になってしまうと説明できる．さらにこれらの運動量と良い交換関係を持つ，改良された座標演算子を定義すると，これらの改良された x, y 座標演算子も互いに非可換となる．

$$xy \neq yx. \tag{4}$$

超弦理論では，こうした事実からヒントを得て，実は時空座標そのものを，行列で表すことで，超弦理論の公理論的定式化ができるのではないかと考える提案がある．こうした一連の考え方は**行列模型**と呼ばれ，自然界を記述する基本理論の一つの仮説として，活発に研究されている．

このように，行列は数学と物理の様々な局面で重要な役割を果たし，道具として多彩な面白さを持つだけでなく，現代物理学の基本概念を定式化したり，時空の統一理論を与える可能性へと深化して行っている．本特集では，物理の基礎から始まり，物性物理学から素粒子物理学の種々の側面で行列が活躍している姿を集めている．これらの記事をご覧になって，行列の面白さと奥深さの様々な様相をご覧になっていただきたい．

参考文献

1) 坂井典佑：『量子力学 I』，培風館 (1999).
2) ポルチンスキー著，伊藤克司・小竹悟・松尾泰訳：『ストリング理論 1, 2 巻』，シュプリンガー・ジャパン (2006).

（さかい・のりすけ，東京女子大学現代教養学部）

物理学における行列の役割

物理のための行列入門

大貫　義郎

1. 行列入門

一つの物理量が，適当に配列したいくつかの数で記述される場合がある．その例としてベクトルをあげることができよう．よく知られているように3次元空間におけるベクトルは，x 成分，y 成分，z 成分の3個の数を順に並べて表される量である．伝統に従って，これを太文字で書くことにし，2つのベクトル $\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{u}$ の x, y, z の3成分をそれぞれ v_1, v_2, v_3 および u_1, u_2, u_3，すなわち (v_1, v_2, v_3) および (u_1, u_2, u_3) と書こう．このとき両者の成分の間に，a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ を係数として

$$u_i = \sum_j a_{ij} v_j \tag{1.1}$$

なる関係があったとする．ここで下のような記号を使って，これを書き替えることを試みよう．まず上に記したベクトルの3成分を，それらを区切るコンマをはずして縦に並べ

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

とし，また9個の数 a_{ij} を次のように配列して

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

と置く．そうして (1.1) を

$$\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{v} \tag{1.4}$$

またはよりあらわに

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

と書こう．ここで A は3行3列の**行列**または**マトリックス**と呼ばれる[*1]．また a_{ij}は 行列 A の **i-j 成分**と呼ばれ A_{ij} とも書かれる．(1.4) に見るように，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の左に行列 A を書いて新たなベクトルを与えるとき，A を $\boldsymbol{v}$ に**かける**または**作用させる**と言う．大切なことは，行列 A はベクトルと同様に数のセットで与えられ，それ自身が一つの数を表すものではないことである．

(1.4) は (1.1) と同じものなので，このような書き換えは不要と思われるかも知れない．実際，物理学者が行列なるものを意識したのは以外に遅く，それは1925年ハイゼンベルグ（W. Heisenberg）により発見された量子力学という新物理学に触発された結果であった．いわゆるボルン（M. Born）とヨルダン（P. Jordan）のマトリックス力学の創始である (1925)．少なくともそのころまで，ベクトルはすべて成分に分けて記述され，いわば (1.1) の形に書かれていたのである．数値にそのまま対

*1）行列の第 i 行，第 j 列という呼び方は，行列式の場合と同じである．例えば (1.3) では第 i 行は a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} の横に並ぶ3文字，第 j 列は a_{1j}, a_{2j}, a_{3j} を縦に並べた3文字である．

応しない物理量という考えがなかったからかも知れない[*2]．しかしながら，次第に分かってきたことは量子力学でなくても，行列を用いると議論の見通しのよくなることであった．例えば，(1.1) では a_{ij} とベクトルの成分が絡み合っているが，行列を導入すると (1.4) に見るようにそれが表に出てこない．そのために (1.1) を行列の部分とベクトルの部分に分けて議論をすることが可能になるのである．以下にそれを眺めてみよう．

$\boldsymbol{v}$ に定数 c をかけたベクトル $c\boldsymbol{v}$ に，行列 A をさらに作用させると，(1.1) により $A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v}$，よって定数と行列の積が定義できて，積 cA をその i-j 成分が ca_{ij} であるような行列とみなすことができる．すなわち cA は

$$(cA)_{ij} = ca_{ij} \tag{1.6}$$

である．

c, c' を定数，$\boldsymbol{v}'$ を第 i 成分が v'_i のベクトルとする．ベクトルの合成則により $c\boldsymbol{v} + c'\boldsymbol{v}'$ もまたベクトルで，その第 i 成分は $cv_i + c'v'_i$ である．それゆえ (1.1), (1.5) を考慮すれば

$$A(c\boldsymbol{v} + c'\boldsymbol{v}') = cA\boldsymbol{v} + c'A\boldsymbol{v}' \tag{1.7}$$

が成り立つことは容易に分かる．

B を i-j 成分が b_{ij} の行列とし，$\boldsymbol{v}$ からつくられた 2 つのベクトル $cA\boldsymbol{v}$ と $c'B\boldsymbol{v}$ の合成 $cA\boldsymbol{v}+c'B\boldsymbol{v}$ を $(cA+c'B)\boldsymbol{v}$ と書いて，行列 $cA+c'B$ を定義しよう．このとき $\boldsymbol{v}$ の任意性および (1.6) から

$$\begin{aligned}(cA+c'B)_{ij} &= (cA)_{ij} + (c'B)_{ij} \\ &= ca_{ij} + c'b_{ij}\end{aligned} \tag{1.8}$$

と書くことができる．

次に (1.4) の両辺に行列 B を作用させてみよう．このとき左辺の第 i 成分は (1.1) を用いれば

$$(B\boldsymbol{u})_i = \sum_k b_{ik}u_k = \sum_{k,j} b_{ik}a_{kj}v_j \tag{1.9}$$

と書かれる．他方，右辺の第 i 成分は $(B(A\boldsymbol{v}))_i$ であるが，これを $\boldsymbol{v}$ に行列 BA をかけた結果とみなして，B と A の積を定義することにしよう．すなわち

$$(B(A\boldsymbol{v}))_i = \sum_j (BA)_{ij}\boldsymbol{v}_j \tag{1.10}$$

とする．これと (1.9) を比較すると $\boldsymbol{v}$ の任意性から

$$(BA)_{ij} = \sum_k b_{ik}a_{kj} \tag{1.11}$$

となり，これが行列の積の定義を与える．

2. 行列の演算

読者はすでに気付いておられると思うが，扱われる行列の 3 行 3 列は，ここまで何ら本質的な役割を果たしていない．3 行 3 列はなじみの深い 3 次元空間のベクトルを考えたからであって，n 個の成分 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ をもつ n 次元空間のベクトルを v とし[*3]，その成分を縦に並べて (1.2) の第 1 式の右辺に置いてよい．その他も同様で，太文字 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}'$ は n 成分のベクトル u, v' に置き換える．そうして i, j 等のすべての下付きの添字は，1 から n の値をとるものとしよう．このようにすれば (1.1) から[*4]，(1.3) に対応して n 行 n 列の行列（以下，n 次の行列と呼ぶ）

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

が抽出され，n 次の行列の和と積が，(1.8) および (1.11) により定義される．言うまでもなくこのとき添字は 1 から n までの値をとる．

以下では，断りがない限り行列は n 次とし，ベクトルは n 成分とする．また行列やベクトルの成分は一般に複素数とするが，とくに実数に限る場合は**実行列**，**実ベクトル**と言うことにする．

定義 (1.11) より行列の積は，行列 A, B, C に対して**結合則**

---

*2) 行列と異なり数量を記述する行列式は，17 世紀に関孝和やライプニッツ（G.W. Leibniz）によりすでに見出されていた．

*3) 太文字は 3 次元ベクトルに対してのみ用いる．

*4) ここでの j の和は 1 から n まで．

$$C(BA) = (CB)A \tag{2.2}$$

を満たしていることが確かめられる．同様にして (1.8) および (1.11) により**分配則**

$$A(B+C) = AB + AC, \tag{2.3}$$

$$(A+B)C = AC + BC \tag{2.4}$$

が成立する．注意すべきは，行列の和は (1.8) により可換則 $A+B=B+A$ に従うことが分かるが，積については AB と BA が一般に異なる行列を与え可換則が破られることである．これは行列の演算の特徴と言ってよい．もちろん特別の A と B に対し $AB=BA$ の成立することがある．このときには，行列 A と B は**可換**であると言われる．

以上で行列とはどういうものかの概略を述べてきた．次節ではさらに立ち入って話を進めよう．

3. 行列の諸性質

任意の n 次の行列 A に対し

$$AI = IA = A \tag{3.1}$$

を満たす行列 I を**単位行列**と呼ぶ．その i-j 成分は (3.1) から容易に分かるように δ_{ij}，すなわち I は左上から右下に至る対角線上で 1，他は 0 の行列で与えられる*5)．

与えられた行列 A に対し

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \tag{3.2}$$

を満たす行列 A^{-1} を A の**逆行列**または単に**逆**と呼ぶ．しかし任意の A にいつでも逆が存在するわけではない．それを具体的に見るために行列式の知識を若干借りることにしよう．

a_{ij} を i-j 成分とする行列式を $\det(a_{ij})$，または対応する行列 A を用いて $\det A$ と書く．(1.11) によれば行列 B と A の積は，よく知られた $\det B$ と $\det A$ の積と同じ構造をもっている．それゆえ

$$\det(BA) = \det B \, \det A \tag{3.3}$$

が成り立つ．

ここで我々は行列式の関するラプラス（P.S. Laplace）の展開公式を援用しよう．必要な結果のみを記すとそれは次のように述べられる．

n 次の行列式 $\det A$ の表式から第 i 行と第 j 列を除いた $(n-1)$ 次の行列式を $\Delta(ij)$ とし

$$Q_{ij} \equiv (-1)^{i+j}\Delta(ij) \tag{3.4}$$

とするとき

$$\sum_k Q_{ik}\, a_{kj} = \sum_k a_{ik}\, Q_{kj} = \delta_{ij} \det A \tag{3.5}$$

なる関係が成り立つ*6)．

ここで i-j 成分が Q_{ij} の行列を Q と書こう．このとき (1.11) により (3.5) は $QA = AQ = (\det A)\, I$ となる．それゆえ $\det A \neq 0$ のときに限り

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} Q \tag{3.6}$$

が与えられる．ここに $\det A \neq 0$ は A^{-1} が存在するための必要十分条件である．$\det A \neq 0$ であれば (3.2) および (3.3) から $\det A^{-1} \neq 0$，それゆえ A^{-1} に逆が存在して $(A^{-1})^{-1} = A$ を得る．また A, B に逆があれば，積 AB にも逆が存在し

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{3.7}$$

となる．これらは簡単に分かることなので自分で確かめていただきたい．

行列 A の行と列を入れ換えた行列を A^{T} と書き，A の**転置行列**と呼ぶ．すなわち $(A^{\mathrm{T}})_{ij} \equiv a_{ji}$ であって，c, c' を定数とするとき

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A, \quad (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}, \tag{3.8}$$

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}} \quad (\det A \neq 0), \tag{3.9}$$

$$(cA + c'B)^{\mathrm{T}} = cA^{\mathrm{T}} + c'B^{\mathrm{T}}, \tag{3.10}$$

$$\det A^{\mathrm{T}} = \det A \tag{3.11}$$

が成り立つ．とくに $A^{\mathrm{T}} = A$ のとき，A を**対称行列**と呼ぶ．

*5) δ_{ij} は**クロネッカー**（L. Kronecker）の**デルタ記号**と呼ばれ，$i=j$ ならば 1，$i \neq j$ ならば 0 を表す．

*6) ちなみにこの式を使うと行列式はより低次の行列式の和で表されるので，この操作を繰り返せば，任意の行列式の値を求めることができる．

量子力学において行列を扱う際に，**エルミート** (C. Hermite) **共役**なる語が用いられる．任意の複素数 λ の複素共役を λ^* と書く．そうして行列 A の成分のそれぞれをすべてその複素共役で置き換えた行列を A^* とし，A の**複素共役行列**と呼ぶ．すなわち $(A^*)_{ij} = a^*_{ij}$ である．A^* の転置行列 $(A^*)^{\mathrm{T}}$（これは A^{T} の複素共役行列でもある）を $A^\dagger$ と書き，これを A に**エルミート共役**な行列，または単に A のエルミート共役と言う．したがって $(A^\dagger)_{ij} = a^*_{ji}$ である．このとき次の式が成り立つことが容易に確かめられる．

$$(A^\dagger)^\dagger = A, \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger, \tag{3.12}$$

$$(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger \quad (\det A \neq 0), \tag{3.13}$$

$$(cA + c'B)^\dagger = c^* A^\dagger + c'^* B^\dagger, \tag{3.14}$$

$$\det A^\dagger = (\det A)^*. \tag{3.15}$$

とくに行列 H が

$$H^\dagger = H \tag{3.16}$$

を満たすとき，H は**エルミート行列**，または単に**エルミート**と呼ばれ，次に述べるユニタリ行列とともに量子力学においては，大切な役割を演じる．2つのエルミート行列の和はエルミートであるが，それらが可換でなければ積はエルミートではない．

前節の初めに述べたように，我々は行列が作用するベクトルとして，n 個の複素数を成分とするいわゆる n 次元の複素ベクトルを頭に置いてきた．このようなベクトル v, u 等の第 i 成分をそれぞれ v_i, u_i 等と書くとき，通常の3次元実ベクトルの内積に見習って，これらの内積を

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i^* v_i \tag{3.17}$$

と定義する．言うまでもなく $n = 3$ として成分 v_i, u_i がすべて実数の場合が，通常の3次元実ベクトルの内積である．

(3.17) において $u = v$ とすると

$$(v, v) = \sum_i |v_i|^2 \geqq 0 \tag{3.18}$$

を得る．左辺の平方根 $(v, v)^{1/2}$ はベクトル v の**大きさ**または**ノルム**と呼ばれ $\|v\|$ と書かれる．$\|v\| = 0$ となるのは，すべての成分が0のベクトルに限られ，これは**ゼロベクトル**と呼ばれて $v = 0$ と記される．

いまベクトルの成分が，W_{ij} を係数とする1次結合として，すべて同じ形の変換，つまりベクトル v も u も

$$\begin{cases} v_i \to \sum_j W_{ij} v_j, \\ u_i \to \sum_j W_{ij} u_j \end{cases} \tag{3.19}$$

なる変換を受けるとする．このとき内積 (u, v) の変換は，(3.17) から

$$\begin{aligned}(u, v) &\to \sum_{i,j,k} W^*_{ij} W_{ik} u^*_j v_k \\ &= \sum_i (W^\dagger W)_{jk} u^*_j v_k \end{aligned} \tag{3.20}$$

となる．ただし W は i-j 成分が W_{ij} の行列である．ここで上の変換で内積 (u, v) は不変，すなわち (3.17) の右辺と (3.20) の右辺は等しいとする．このとき v, u の任意性から

$$W^\dagger W = I \tag{3.21}$$

が満たされなければならない．変換 (3.19) で内積を変えないこのような W は，**ユニタリ行列**あるいは単に**ユニタリ**と呼ばれる．このとき $WW^\dagger = I$ もまた成立する*7)．容易に分かるように2つのユニタリ行列 W, W' の積 WW' はユニタリである．また (3.12) より H をエルミート，W をユニタリとするとき，$W^\dagger H W$ はエルミートである．

このとき次の命題が成立する．

命題：H をエルミート行列とするとき，適当なユニタリ行列 W を用いて，$W^\dagger H W$ を対角行列（左上から右下に至る対角線上以外の成分はすべて0の行列）にすることができる．すなわち

*7) n 次の行列 A, B が $AB = I$ を満たせば，$BA = I$ を導くことができる．ただし $n = \infty$ とするとこれは保証されない．量子力学では n が ∞ になる場合があるので注意を要する．

$$W^\dagger H W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

である．

この関係は古典力学や量子力学において最もよく使われる式の一つであるが，その導出は話が長くなるのでここでは省略する．λ_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ は H の**固有値**と呼ばれ，$(W^\dagger HW)^\dagger = W^\dagger HW$ から実数であることが分かる．

固有値 λ_i は次のようにして決定される．

いまベクトル $\eta^{(i)}$ は第 i 成分のみが 1 で他の成分はすべて 0，すなわち $\eta_j^{(i)} = \delta_{ij}$ とし，(3.22) を左からこれに作用させると $W^\dagger HW\eta^{(i)} = \lambda_i\,\eta^{(i)}$，したがって $\xi^{(i)} = W\eta^{(i)}$ とすると，この式は $(H-\lambda_i I)\xi^{(i)} = 0$ と書くことができる．それゆえ λ_i は，次式の λ に関する解である．

$$(H-\lambda I)\xi = 0, \quad (\xi, \xi) = 1. \tag{3.23}$$

ここで $\xi \neq 0$ のため，これにかかる行列 $(H-\lambda I)$ には逆の存在が許されず，したがって

$$\det(H-\lambda I) = 0 \tag{3.24}$$

となる．これは λ に関する n 次方程式で n 個の実数解 λ_i を与え，その結果 $(H-\lambda_i I)\xi^{(i)} = 0$ より対応する $\xi^{(i)}$（H の**固有ベクトル**と呼ばれる）を求めることができる．H から (3.22) の右辺のような対角行列を導く操作を，ユニタリ行列 W による H の**対角化**と言う[*8)]．そうして固有値を決定する (3.23) 式は**固有方程式**と呼ばれる．

ついでに記すと，任意のユニタリ行列 U は適当に選ばれたエルミート行列 H を用いて

$$U = \frac{I + \mathrm{i}\,H}{I - \mathrm{i}\,H} \tag{3.25}$$

と書くことができる．それゆえユニタリ行列 W により右辺の H を対角化すれば，左辺の U も対角化される．このとき H の固有値を $\tan\theta_i/2$ と書けば，(3.25) より対応する U の固有値 ρ_i は $e^{\mathrm{i}\theta_i}$ である．これは (3.24) と同形の固有方程式

$$\det(U-\rho I) = 0 \tag{3.26}$$

から求めることができる．

4. おわりに

行列とはどんなものかということを述べてきた．いろいろな応用例を示すとよいのだが，その余裕がないので補足をかね，以下では行列と空間回転の関係につき若干述べることにしたい．

3 次元空間の実ベクトル $\boldsymbol{v}$ の各成分の値 v_i $(i = 1, 2, 3)$ は，空間に設置された直交座標系（S と記す）を基準にして与えられる．すなわち x, y, z 軸方向を向く大きさ 1 の実ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}$ とするとき

$$\boldsymbol{v} = \sum_i v_i \boldsymbol{e}^{(i)}, \quad v_i = (\boldsymbol{e}^{(i)}, \boldsymbol{v}) \tag{4.1}$$

と書かれる[*9)]．同様にして S と原点を共有する直交座標系 S' の 3 個の軸方向の大きさ 1 の実ベクトルを $\boldsymbol{e}'^{(1)}, \boldsymbol{e}'^{(2)}, \boldsymbol{e}'^{(3)}$ とすれば，$\boldsymbol{v}$ はまた

$$\boldsymbol{v} = \sum_i v'_i \boldsymbol{e}'^{(i)}, \quad v'_i = (\boldsymbol{e}'^{(i)}, \boldsymbol{v}) \tag{4.2}$$

とも書かれる．(1.4) とは違ってここでは $\boldsymbol{v}$ 自身は固定されたままだが，それを記述する座標系が S から S' に変わったために成分の値に変化が生じたのである．(4.1) の第 1 式と $\boldsymbol{e}'^{(i)}$ の内積をとり (4.2) の第 2 式を用いれば

$$v'_i = \sum_j R_{ij} v_j, \quad R_{ij} \equiv (\boldsymbol{e}'^{(i)}, \boldsymbol{e}^{(j)}) \tag{4.3}$$

を得る．以下では (1.4) と区別する意味で太文字を用いずに (4.3) の第 1 式を

$$v' = Rv \tag{4.4}$$

と書く．また第 2 式に見るように，R_{ij} を i-j 成分とする行列 R は 2 つの座標系 S と S' にのみ

*8) 行列 A が適当なユニタリ行列 W により対角化できるための必要十分条件は $A^\dagger A = AA^\dagger$ である．

*9) ここで座標系はすべて右手系とする．すなわち $(\boldsymbol{e}^{(i)}, \boldsymbol{e}^{(j)}) = \delta_{ij}$ かつ $\boldsymbol{e}^{(1)} = \boldsymbol{e}^{(2)} \times \boldsymbol{e}^{(3)}$，以下同様．

依存する実行列で，S から S' へと座標軸の向きを変更する働きをする．通常，R は3次元の**回転行列**または単に**回転**と呼ばれるが，その内容を少し詳しく見てみよう．

(4.1) で $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{e}'^{(j)}$ と置き換えよう．このとき $v_i = (\boldsymbol{e}^{(i)}, \boldsymbol{v}) \to (\boldsymbol{e}^{(i)}, \boldsymbol{e}'^{(j)}) = R_{ji}$ となること[*10)]を考慮すると $\boldsymbol{e}'^{(j)} = \sum_i R_{ji}\boldsymbol{e}^{(i)}$，よってこれと $\boldsymbol{e}'^{(k)}$ との内積をつくれば $\delta_{jk} = \sum_k R_{ji}R_{ki}$ を得る．すなわち行列 R は

$$RR^{\mathrm{T}} = I \tag{4.5}$$

を満たす．R は実行列であるから $R^{\mathrm{T}} = R^{\dagger}$ より上式は $RR^{\dagger} = I$ と書かれ，したがって R は実ユニタリ行列と言うことができる．

S に回転 R を作用させて S' に行き，ここからさらに R' によって座標系 S''（座標軸方向の単位ベクトルは $\boldsymbol{e}''^{(1)}, \boldsymbol{e}''^{(2)}, \boldsymbol{e}''^{(3)}$ とする）に至ったとしよう．すなわち

$$S \xrightarrow{R} S' \xrightarrow{R'} S'' \tag{4.6}$$

であって，S'' から見た $\boldsymbol{v}$ の成分を v''_i とすれば

$$v'' = R'v' = R'Rv \tag{4.7}$$

と書かれる．ここで $\sum_k(\boldsymbol{e}''^{(i)}, \boldsymbol{e}'^{(k)})\boldsymbol{e}'^{(k)} = \boldsymbol{e}''^{(i)}$ と $\boldsymbol{e}^{(j)}$ の内積をつくると，左辺は $\sum_k(\boldsymbol{e}''^{(i)}, \boldsymbol{e}'^{(k)}) \times(\boldsymbol{e}'^{(k)}, \boldsymbol{e}^{(j)}) = \sum_k R'_{ik}R_{kj} = (R'R)_{ij}$ と書かれる．他方，右辺は $(\boldsymbol{e}''^{(i)}, \boldsymbol{e}^{(j)})$ となるゆえ

$$(R'R)_{ij} = (\boldsymbol{e}''^{(i)}, \boldsymbol{e}^{(j)}) \tag{4.8}$$

を得る．この式は S から S'' へ至る過程で S' を通過したという痕跡をどこにも残していない．しかも途中の通過点の数を増やしても結果の変わらないことは容易に分かるであろう．つまりどう寄り道をしようが回転は出発点の座標系と終点の座標系だけで一意に与えられることになるのである．このことは R の全体が数学でいう**群**をつくっていることを保証する．この群は**3次元回転群**と呼ばれている．

(4.5) の両辺の行列式をつくると $(\det R)^2 = 1$，それゆえ $\det R = \pm 1$ であるが，S と S' はともに右手系であり一方から他方に連続的に移行できるので，上式右辺の負符号は許されず

$$\det R = 1 \tag{4.9}$$

となる．(4.6) は (4.9) とともに3次元回転群を特徴づける式で，角運動量を扱う際に大切な役割を担うことが知られている．

前節の終わりにユニタリ行列の固有値について述べたが，ここで R の固有値について触れておこう．(3.26) より固有方程式は実係数の3次方程式

$$\det(R - \rho I) = 0 \tag{4.10}$$

であって，固有値を与える解 ρ_i $(i = 1, 2, 3)$ はすべて絶対値が1，すなわち $|\rho_i| = 1$，そしてこの中には少なくとも実解が1個存在しなければならない．他方，方程式 (4.10) の解と係数の関係から

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = \det R = 1 \tag{4.11}$$

が成立する．このとき $R \neq I$ であって回転が実際に行われていれば，R の3個の固有値のうち一つだけがは必ず1になることを容易に見ることができる[*11)]．その結果，各 R に対して

$$R\boldsymbol{n}_R = \boldsymbol{n}_R, \quad (\boldsymbol{n}_R, \boldsymbol{n}_R) = 1 \tag{4.12}$$

を満たすベクトル $\boldsymbol{n}_R$ が存在する．すなわちベクトル $c\boldsymbol{n}_R$ $(-\infty < c < \infty)$ だけが回転 R の下で成分の値を変えることがない．このようなベクトルによって示される直線は回転 R の**回転軸**と呼ばれ，剛体の運動の吟味において必要になる．

* * * *

(1.1) や (4.3) の左式のようなベクトル成分の1次結合から抽出された行列という概念は，その抽象性にも関わらず，物理においては有力なツールとして広く使用されるに至っている．とくに量子力学においては，古典論と異なり，行列自身が物理量そのものを記述する．そうしてその役割を無視することは不可能と言ってよいのである．

（おおぬき・よしお，名古屋大学名誉教授）

---

*10） $\boldsymbol{e}^{(i)}$，$\boldsymbol{e}'^{(j)}$ がともに実ベクトルのため $(\boldsymbol{e}^{(i)}, \boldsymbol{e}'^{(j)}) = (\boldsymbol{e}'^{(j)}, \boldsymbol{e}^{(i)}) = R_{ji}$．

*11） 残りの2つは，互いに複素共役で絶対値が1の複素数，あるいはともに -1 の何れかである．

力学と行列

回転運動を例に

下 村　裕

1. 行列ができるありがたさ

「行列」のできる店や「行列」のできる法律相談所等々は多くあるが,「行列」のできる研究所はめったにない．しかし，せめて数学における行列は自在に使いたいものである．というのも，物理学の様々な分野において行列をツールとして用いるご利益があるからだ．実際，**古典力学**でも行列ができるありがたさを感じる表現や解析がある．

行列は 2 階のテンソルに対する表現である．2 階のテンソルは，その成分を添字に対応する行と列に表示することによって，抽象性は失うものの具体的に扱えるようになる．力学に現れる重要な物理量の中で，**慣性テンソル**，応力テンソル，歪みテンソルと呼ばれる量は 2 階のテンソルなので，行列によって直感的に「見る」ことができるのだ．さらに，それらの行列は実対称行列なので座標軸を主軸の方向にとれば**対角化**でき，より簡単に取り扱うことが可能となる．

一方，行列は**線形写像**の表現でもある．原点を共有する 2 つの**直交座標系**間の座標変換は線形写像であるので，比較的簡単な行列の積によってその変換行列を計算できる[1]．あるいは，静力学におけるつり合い状態や動力学における定常（時間に依らない）状態の微小な攪乱に対する安定性は，一般に線形理論を用いて解析できるのでやはり行列表示が有効であり，系の**線形安定性**は行列の**固有値**や**固有ベクトル**によって決まる．またこれら固有値や固有ベクトルは，結合された複数のバネや振り子による微小な（連成）振動における**基準振動**に対応する[2]．

「力学と行列」というタイトルの本稿では回転運動を例に取り上げ，回転した座標を表す行列，回転しにくさを表す行列，そして回転のおちつきを表す行列を紹介することにしよう．具体的にはそれぞれ上記中の，直交座標変換，慣性テンソル，そして線形安定性についての解説である．予備知識として行列に関する基本的事項（演算，対角化，**固有値問題**等）と初歩の力学を前提とする．

2. 回転した座標を表す行列—直交座標変換

本節では，直交座標系とその原点の周りに回転したもう一つの直交座標系を考える．そして任意の点の両座標系における座標の関係を示す変換行列を導出する．基礎となる 2 次元の場合から初め，その後一般的な 3 次元の場合を議論しよう．

2.1 2 次元の場合

まず，平面上の直交座標系 O-x, y と O-x', y' を考える．それらは原点 O を共有し角度 φ をなしているとする．図 1 (I) に描かれている，原点 O を通り $z(z')$ 軸に垂直な平面上の座標系である．両座標系における任意点の座標は幾何学的考察より

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

という関係にあることがわかる．これを行列で表すと

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2)$$

と書け，座標変換行列 R は

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (3)$$

で与えられる．この行列 R の**転置行列** ${}^tR$ は

$${}^tR = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (4)$$

であるが，**単位行列**を E として

$${}^tRR = R{}^tR = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

を満たす．この関係を満たす正方行列 R は一般に**直交行列**と呼ばれ，転置行列 ${}^tR$ が**逆行列** R^{-1} に一致する．したがって，式 (2) より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^tR \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad (6)$$

が成り立つ．

2.2 3 次元の場合

次に，一般的な 3 次元の場合を考えよう．やはり原点を共有した 2 つの直交座標系 O-x, y, z と O-ξ, η, ζ を考える．

2 次元の場合，2.1 節で見たように，2 つの直交座標系の相対配位は 1 つの角度 φ で指定できた．この角度 φ は 3 次元空間で見ると，x, y 軸を z 軸の周りに回転して x', y' 軸に一致する回転角である．したがって 3 次元における 2 つの直交座標系の相対配位は，z 軸，x 軸，y 軸周りの 3 つの回転角を指定すれば決まると思われる．しかしながら，3 つの軸周りの回転を組み合わせて座標系 O-x, y, z を O-ξ, η, ζ に一致させる操作は，最初に固定した座標軸周りの回転よりも，各回転で新たに得られた座標軸周りの回転のほうが考えやすい．実際，力学において一般に用いられる 3 つの量 θ, φ, ψ はこのような操作に現れる角度であり，オイラー角と呼ばれている．

図 1 に示されたオイラー角 θ, φ, ψ は，以下 3 段階の回転操作で定義される反時計回りの角度である．

(I) 初めに，座標軸 x, y, z を z 軸の周りに角 φ だけ回転し，その結果得られる座標軸を x', y', z' とする．

(II) 次に，座標軸 x', y', z' を y' 軸の周りに角 θ だけ回転し，その結果得られる座標軸を x'', y'', z'' とする．

(III) 最後に，座標軸 x'', y'', z'' を z'' 軸の周りに角 ψ だけ回転して，座標軸 ξ, η, ζ を得る．

ここで，それぞれの回転操作による座標変換行列を考え，その積をとることで 3 段階の回転操作を組み合わせた座標変換行列を計算しよう．

(I) は，z 軸と z' 軸が一致することを考えれば後は 2.1 節と同様なので，座標変換は行列 A によって

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

と表される．

(II) は，同様に y 軸と y' 軸が一致することと x', z' の並ぶ順序に注意すると，座標変換は行列 B によって

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (10)$$

と書ける．

(III) も同様に z'' 軸と ζ 軸が一致するので，座標変換は行列 C によって

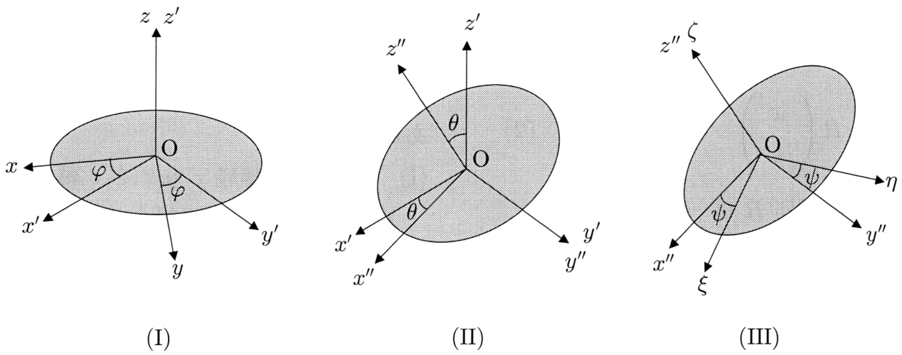


図 1　直交座標系の配置関係：(I) O-x, y, z と O-x', y', z' (II) O-x', y', z' と O-x'', y'', z'' (III) O-x'', y'', z'' と O-ξ, η, ζ.

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

と与えられる．

以上より，上記 3 段階の回転操作を組み合わせた座標変換行列 Q は式 (7), (9), (11) より

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$Q = CBA \tag{14}$$

と表せる．行列 A, B, C は直交行列なので，式 (14) で与えられる行列 Q も直交行列であり，Q の逆行列 Q^{-1} は

$$Q^{-1} = {}^t\!Q = {}^t(CBA) = {}^t\!A\,{}^t\!B\,{}^t\!C, \tag{15}$$

となる．ちなみに行列 Q の成分 Q_{ij} は，式 (8), (10), (12), (14) より

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \cos\theta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \\ Q_{12} &= \cos\theta\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi, \\ Q_{13} &= -\sin\theta\cos\psi, \\ Q_{21} &= -\cos\theta\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi, \\ Q_{22} &= -\cos\theta\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi, \\ Q_{23} &= \sin\theta\sin\psi, \\ Q_{31} &= \sin\theta\cos\varphi, \\ Q_{32} &= \sin\theta\sin\varphi, \\ Q_{33} &= \cos\theta \end{aligned} \tag{16}$$

と計算できる．

著者は行列 Q のありがたみを感じたことがある．回転する物体を 2 台の高速度カメラを用いて撮影し，その物体に固定した 3 つのマーカーの実験室系における 3 次元座標を画像処理することによって得たが，そのデータから物体の回転配位をどう求めるかが問題となったときであった．幾何学的に求めようとすると大変複雑で困難であるが，上記の知識があると簡単に求めることができる．つまり，座標系 O-x, y, z を実験室系，そして座標系 O-ξ, η, ζ を物体に固定した座標系と考え，二組の既知の座標 ${}^t(x, y, z)$ と対応する座標 ${}^t(\xi, \eta, \zeta)$ から式 (13), (16) を用いることにより，オイラー角 θ, φ, ψ が決まるのである[3)].

3. 回転しにくさを表す行列―慣性テンソル

本節では**剛体**の回転に対する慣性を考える[4)]．剛体とは固い物体の近似であり，剛体を構成する任意の質点間の距離は一定で変わらないとする．表記を簡単にするため，剛体を質量 m_i をもつ質点 i の集まり（質点系）と見なそう．

剛体が点 O の周りに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している

場合，質点 i の点 O に対する位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とすると，その質点 i の速度 $\boldsymbol{v}_i$ は，

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \tag{17}$$

で与えられる．したがって点 O の周りの剛体（質点系）の角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum_i (\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) \\ &= \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)\end{aligned} \tag{18}$$

と表せ，ベクトル 3 重積の展開公式を用いれば

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\omega}\left(\sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i)\right) - \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \tag{19}$$

を得る．$\boldsymbol{L} = {}^t(L_1, L_2, L_3)$，$\boldsymbol{\omega} = {}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$，$\boldsymbol{r}_i = {}^t(x_i, y_i, z_i)$ とすると，このベクトル式の各成分は

$$\begin{aligned}L_1 &= \omega_1 \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_2 \sum_i m_i x_i y_i \\ &\quad - \omega_3 \sum_i m_i x_i z_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_2 &= -\omega_1 \sum_i m_i y_i x_i + \omega_2 \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \\ &\quad - \omega_3 \sum_i m_i y_i z_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_3 &= -\omega_1 \sum_i m_i z_i x_i - \omega_2 \sum_i m_i z_i y_i \\ &\quad + \omega_3 \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)\end{aligned} \tag{20}$$

と書ける．ここで，3 行 3 列の行列 I を

$$I_{11} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2),$$

$$I_{12} = -\sum_i m_i x_i y_i,$$

$$I_{13} = -\sum_i m_i x_i z_i,$$

$$I_{21} = -\sum_i m_i y_i x_i,$$

$$I_{22} = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2),$$

$$
\begin{aligned}
I_{23} &= -\sum_i m_i y_i z_i, \\
I_{31} &= -\sum_i m_i z_i x_i, \\
I_{32} &= -\sum_i m_i z_i y_i, \\
I_{33} &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)
\end{aligned} \tag{21}
$$

によって定義すると，式 (20) は

$$
\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \tag{22}
$$

と表すことができる．行列 I は慣性テンソルと呼ばれる 2 階のテンソル I_{ij} の行列表現である．

剛体を質点系ではなく密度 $\rho(x,y,z)$ の連続体と見なす場合は，I の定義式 (21) において

$$
\begin{aligned}
&\sum_i m_i \longrightarrow \int \rho(x,y,z)\,dxdydz, \\
&{}^t(x_i, y_i, z_i) \longrightarrow {}^t(x,y,z)
\end{aligned} \tag{23}
$$

という置き換えをすればよい．

I の定義式 (21) を眺めて気づくことが 2 つある．

第一は，慣性テンソル I が，空間に固定した座標系 O-x,y,z をとる場合，剛体が運動するとき一般に時間とともに変化することである．しかし，剛体に固定した座標系 O-ξ,η,ζ をとれば I は時間に依存しない一定の行列となるので，剛体の動力学では座標を剛体に固定するほうが考えやすい．

第二は，行列 I が実対称行列であることである．したがって適当な直交座標軸を選べば I を対角化することができる．つまり，I の非対角成分をすべて 0 にすることができるのだ．そのような特別の座標軸をその剛体の**慣性主軸**と呼ぶ．慣性主軸をとると，角運動量 $\boldsymbol{L}$ は式 (22) より

$$
L_1 = I_1\omega_1, \quad L_2 = I_2\omega_2, \quad L_3 = I_3\omega_3 \tag{24}
$$

と大変簡単に表現できる．上式 (24) では，

$$
I_1 = I_{11}, \quad I_2 = I_{22}, \quad I_3 = I_{33} \tag{25}
$$

と略記したが，これらは**主慣性モーメント**と名づけられている．

4. 回転のおちつきを表す行列―線形安定性

静力学におけるつり合い状態や動力学における定常状態の，微小な撹乱に対する安定性は線形理論で解析できる．本節ではこの場合に現れる行列を紹介しよう．いわば回転のおちつき (安定性) を表す行列である．簡単な例として，主慣性モーメント I_1, I_2, I_3 が不等式

$$
I_1 < I_2 < I_3 \tag{26}
$$

を満たす剛体の，自由回転に対する線形安定性を考える．

重心（重みの中心）を原点 O として剛体に固定した慣性主軸からなる座標系 O-ξ,η,ζ を採用する．主慣性モーメントは時間によらず一定となり，剛体の角速度成分は

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \\
I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1, \\
I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2
\end{aligned} \tag{27}
$$

を満たすことが知られている[4]．ここで ω_i の上についているドットは時間 t に関する微分演算 d/dt を意味している．剛体の角運動量方程式である**オイラー方程式**から導出される方程式であるが，重心を原点にとっているので空気抵抗が無視できれば重力場の中でも成立する式である．

方程式 (27) は簡単な 3 つの定常解をもつ．すなわち，方程式 (27) の時間に依存しない解 ${}^t(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ は 3 種類存在し，Ω を任意の実定数として

$$
{}^t(\Omega,0,0), \quad {}^t(0,\Omega,0), \quad {}^t(0,0,\Omega) \tag{28}
$$

で与えられる．これらはそれぞれ，剛体に固定された各慣性主軸周りの単純な定常回転状態に対応しているが，どれも安定な状態なのだろうか？ この問いに答えるために，定常状態に微小な撹乱 ω_i' が入った場合の安定性を解析しよう．

まず，ξ 軸周りの定常回転状態 ${}^t(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = {}^t(\Omega,0,0)$ から考える．

$$ {}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = {}^t(\Omega + \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3) \tag{29} $$

を式 (27) に代入し，微小摂乱 ω'_i の 2 次微小量を無視して線形化すると

$$ \begin{aligned} &\dot{\omega}'_1 = 0, \\ &I_2\dot{\omega}'_2 = (I_3 - I_1)\omega'_3\Omega, \\ &I_3\dot{\omega}'_3 = (I_1 - I_2)\Omega\omega'_2 \end{aligned} \tag{30} $$

を得る．第一式から ω'_1 は時間的に変化せず微小なままであることを示している．第二式と第三式は時間に関する連立一階微分方程式であるが，二階微分を導入すれば簡単に解ける．けれどもここでは，より複雑な場合にも応用できるよう行列を用いた解析を説明する．

正方行列 S を

$$ S = \begin{pmatrix} 0 & \Omega(I_3 - I_1)/I_2 \\ \Omega(I_1 - I_2)/I_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{31} $$

によって定義すると，第二式と第三式はまとめて行列の形で

$$ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} \tag{32} $$

と表せる．

ここに現れた行列 S が回転のおちつき（安定性）を表す行列である．S の固有値 λ は，行列 $\lambda E - S$ の行列式を 0 にする複素数であり，この場合は式 (26) に注意することによって

$$ \lambda_\pm = \pm i\Omega\sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)}{I_2 I_3}} \tag{33} $$

という 2 つの純虚数 λ_+, λ_- になる（i は虚数単位）．そして，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_\pm$ は，

$$ \mu = i\sqrt{\frac{I_2(I_2 - I_1)}{I_3(I_3 - I_1)}} \tag{34} $$

として

$$ \boldsymbol{u}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mu \end{pmatrix} \tag{35} $$

で与えられる．**線形代数**[5]によると，この固有ベクトルを列に並べた正方行列 P を用いれば正方行列 S は対角化できる．実際，

$$ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \tag{36} $$

とすれば，

$$ P^{-1}SP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \tag{37} $$

が成り立つ．

したがって，線形変換

$$ \begin{pmatrix} \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \tag{38} $$

によって新しい複素変数 ϵ_2, ϵ_3 を導入すると，式 (32) は

$$ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} = P^{-1}SP\begin{pmatrix} \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{pmatrix} \tag{39} $$

と書き直せる．ここで行列 $P^{-1}SP$ は式 (37) に示された対角行列なので，c_2, c_3 をそれぞれ ϵ_2, ϵ_3 の初期値とすると，式 (39) より

$$ \epsilon_2 = c_2 \exp[\lambda_+ t],\ \epsilon_3 = c_3 \exp[\lambda_- t] \tag{40} $$

と一階の常微分方程式が解ける．したがって，式 (38) によって決まる ω'_2, ω'_3 も $\exp[\lambda_\pm t]$ の**線形結合**で表せる．ここで式 (33) が示すように $\lambda_\pm$ は純虚数なので，微小摂乱 ω'_2, ω'_3 は，時間的に振幅を変えず振動することを意味する．すなわち，ξ 軸周りの定常回転状態は（中立）安定であることがわかった．

ζ 軸周りの定常回転状態 ${}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = {}^t(0, 0, \Omega)$ も同様に，行列の固有値が純虚数

$$ \pm i\Omega\sqrt{\frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2}} \tag{41} $$

となり（中立）安定である．

最後に，η 軸周りの定常回転状態 ${}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = {}^t(0, \Omega, 0)$ であるが，この場合に回転のおちつき（安定性）を表す行列の固有値は実数

$$ \pm\Omega\sqrt{\frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3}} \tag{42} $$

で与えられる．これは，式 (38) と (40) からわかるように，正の固有値に対応する解によって撹乱の大きさが時間とともに増大することを意味する．つまり，η 軸周りの定常回転状態は不安定なのである．

以上まとめると，「「大」，「中」，「小」の主慣性モーメントをもつ剛体が（重力を受けながら）自由回転する場合に「中」の主慣性モーメントを与える慣性主軸周りの回転のみが不安定である．」という事実が行列を用いた線形安定性理論により結論された．この事実は，テニスラケットや本などのような厚みが薄く横に長い剛体を，慣性主軸の一つの周りに回転させて投げ上げたとき観察できる[4)]．

本節で紹介した内容は線形安定性理論の簡単な一例であり，回転楕円剛体の回転安定性[6, 7)]等，実際様々な力学系で応用されている．

5.「力学と行列」のおわりに

本稿では，回転運動の力学に現れる行列を紹介したつもりであるが，その雰囲気を伝えることのみに終わったかもしれない．言葉足らずの部分や予備知識を仮定した事項のために悩んだ読者は，長い「行列」に長時間並んだあげく得たものに満足できなかったような失望感を覚えたのではないかと危惧している．文末に参考文献を記し，そのような読者にご寛恕を乞う．

参考文献

1) 戸田盛和：『力学』，岩波書店 (1982).
2) 今井功，他：『演習 力学［新訂版］』，サイエンス社 (2006).
3) E. Yokoyama, Y. Ito, and Y. Shimomura: 慶應義塾大学日吉紀要，自然科学 **48** (2010) に掲載予定.
4) V.D. バーガー・M.G. オルソン共著，戸田・田上共訳：『力学』，培風館 (1975).
5) 齋藤正彦：『線型代数入門』，東京大学出版会 (1995).
6) H.K. Moffatt, Y. Shimomura and M. Branicki: *Proceedings of the Royal Society A* **460** (2004), 3643–3672.
7) 下村裕：『ケンブリッジの卵―回る卵はなぜ立ち上がりジャンプするのか』，慶應義塾大学出版会 (2007).

（しもむら・ゆたか，慶應義塾大学法学部）

電磁気学と行列，行列式

田中　秀数

1. はじめに

筆者は大学初年次の学生に電磁気学を教えている．本稿では，授業に使っている便利な道具である行列と行列式についてお話ししたい．電磁気学では電位のように，重ね合わせの原理が成り立つ場合が多くある．このような場合に行列を用いると便利である．例えば，いくつもの導体からなる導体系のそれぞれの導体に電荷を与えたときの各導体の電位は，電位係数を成分とする行列を用いると簡潔に表すことができる．また，この行列の逆行列を用いれば，導体のもつ電荷を各導体の電位の関数として表すこともできる．

電磁気学ではフレミング左手の法則，ローレンツ力，ビオ・サバールの法則など，ベクトルの外積で表される法則が多くある．また，4本のマックスウェル方程式の中の2本はベクトル量の回転 (rot) で表される．このベクトルの外積や回転の各成分を正確に暗記することはかなり大変である．そのようなときに，行列式を用いると，各成分を間違いなく書くことができる．以下に，いくつか例をあげて説明しよう．

2. 行列の利用

最初に行列を用いる例について述べることにする．電磁気学では電位について**重ね合わせの原理**が知られている．すなわち，空間内に複数の電荷がある場合に，任意の点の電位は，それぞれの電荷がこの点につくる電位の和で与えられる．

図1のように，相対して置かれた2つの導体AとBを考える．このような導体の組は一般にコンデンサーと呼ばれている．平衡状態においては，個々の導体は内部も含めて等電位になっている．

Aに1 [C] の電荷を，Bに電荷を何も与えないときのAとBの電位をそれぞれ p_{AA}, p_{BA} とする．また，Aに電荷を何も与えず，Bに1 [C] の電荷を与えたときのAとBの電位をそれぞれ p_{AB}, p_{BB} とすると，Aに q_A，Bに q_B の電荷を与えたときのAとBの電位 ϕ_A, ϕ_B は重ね合わせの原理から

$$\left.\begin{aligned} \phi_A &= p_{AA}q_A + p_{AB}q_B, \\ \phi_B &= p_{BA}q_A + p_{BB}q_B \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

のように表される．ここで p_{AA} や p_{BA} などは**電位係数**と呼ばれている．式 (1) は電位係数を成分とする行列を用いて

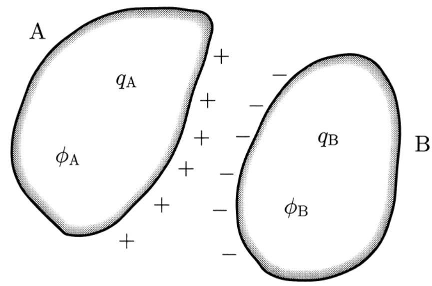


図1　相対して置かれた2つの導体AとB.

$$\begin{pmatrix}\phi_A \\ \phi_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_A \\ q_B\end{pmatrix} \tag{2}$$

のように書くことができる．この電位と電荷の関係は電位係数の行列の逆行列

$$\begin{pmatrix}C_{AA} & C_{AB} \\ C_{BA} & C_{BB}\end{pmatrix} = \frac{1}{p_{AA}p_{BB} - p_{AB}p_{BA}}\begin{pmatrix}p_{BB} & -p_{AB} \\ -p_{BA} & p_{AA}\end{pmatrix} \tag{3}$$

を左から掛けることによって

$$\begin{pmatrix}q_A \\ q_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_{AA} & C_{AB} \\ C_{BA} & C_{BB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_A \\ \phi_B\end{pmatrix} \tag{4}$$

のように表すことができる．ここで，式 (3) の右辺の分母は電位係数の行列の行列式である．式 (4) の C_{AA} や C_{AB} は**容量係数**と呼ばれている．この容量係数の間には**相反定理**

$$C_{AB} = C_{BA} \tag{5}$$

が成り立つ[1)]．このように，導体の電位を電荷の関数として表すことができると，逆行列を用いて機械的に電荷を電位の関数で表すことができる．

コンデンサーでは，2 つの導体の一方に電荷 Q が，他方に $-Q$ が与えられるので，式 (4) で $q_A = Q, q_B = -Q$ とすることにより，

$$Q = \frac{C_{AA}C_{BB} - C_{AB}^2}{C_{AA} + C_{BB} + 2C_{AB}} V \tag{6}$$

が得られる．ここで $V = \phi_A - \phi_B$ は導体間の電位差である．いま

$$C = \frac{C_{AA}C_{BB} - C_{AB}^2}{C_{AA} + C_{BB} + 2C_{AB}} \tag{7}$$

と置けば，式 (6) は

$$Q = CV \tag{8}$$

と表され，よく知られた電圧と蓄えられる電荷の関係式が得られる．この C がコンデンサーの電気容量である．

重ね合わせの原理は，複数のコイルを流れる電流がつくる磁束についても成り立つ．図 2 のように，相対して置かれた 2 つのコイル A と B を考える．コイル A に電流を流すと，コイル A 内には磁場が生じ，磁束が発生する．この磁束の一部は相対して置かれたコイル B も貫く．そこで，コイル A に 1 [A] の電流を流し，コイル B に電流を流さないときのコイル A とコイル B を貫く**全磁束（交鎖磁束）**をそれぞれ L_{AA}, M_{BA} とする．次に，コイル A には電流を流さず，コイル B に 1 [A] の電流を流したときのコイル A とコイル B を貫く全磁束をそれぞれ M_{AB}, L_{BB} とすれば，コイル A に I_A，コイル B に I_B の電流を流したときのコイル A と B を貫く全磁束 Φ_A, Φ_B は重ね合わせの原理から

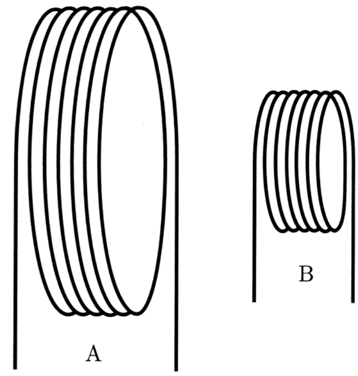


図 2　相対して置かれた 2 つのコイル A と B.

$$\begin{pmatrix}\Phi_A \\ \Phi_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}L_{AA} & M_{AB} \\ M_{BA} & L_{BB}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_A \\ I_B\end{pmatrix} \tag{9}$$

のように表される．ここで L_{AA} と L_{BB} は**自己インダクタンス**，M_{AB} と M_{BA} は**相互インダクタンス**と呼ばれている．また，相互インダクタンスの間には**相反定理**

$$M_{AB} = M_{BA} \ (\equiv M) \tag{10}$$

が成り立つ[2)]．

コイル A と B を流れる電流 I_A, I_B が時間変化をするとき，全磁束 Φ_A と Φ_B も時間変化をするので，コイル A と B には誘導起電力 $V_A^{(i)}, V_B^{(i)}$ が発生する．この誘導起電力はファラデーの法則から

$$V_\alpha^{(i)} = -\frac{d\Phi_\alpha}{dt} \quad (\alpha = \mathrm{A,B}) \tag{11}$$

となる．これから，コイル A と B に発生する誘導起電力と両コイルを流れる電流 I_{A}, I_{B} の間には

$$\begin{pmatrix} V_{\mathrm{A}}^{(i)} \\ V_{\mathrm{B}}^{(i)} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} L_{\mathrm{AA}} & M \\ M & L_{\mathrm{BB}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dI_{\mathrm{A}}/dt \\ dI_{\mathrm{B}}/dt \end{pmatrix} \quad (12)$$

の関係が成り立つ．この式の左から

$$\begin{pmatrix} L_{\mathrm{AA}} & M \\ M & L_{\mathrm{BB}} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{L_{\mathrm{AA}}L_{\mathrm{BB}} - M^2} \begin{pmatrix} L_{\mathrm{BB}} & -M \\ -M & L_{\mathrm{AA}} \end{pmatrix} \quad (13)$$

を掛けると，コイル A と B を流れる電流の時間微分 dI_α/dt $(\alpha = \mathrm{A}, \mathrm{B})$ を誘導起電力 $V_\alpha^{(i)}$ の関数で表すことができる．

式 (2), (4), (9) に現れる行列では相反定理が成り立つので，行列要素の添字の左右を入れ替えても行列は変わらない．このような対称性は電磁気学の美しさを表しているのではなかろうか．

3. 行列式の利用

力学では角運動量と力のモーメント，および慣性力であるコリオリ力と遠心力などがベクトルの外積で定義される物理量である．電磁気学でもベクトルの外積で表される物理量や重要な法則が多くある．以下に主なものを列挙しよう．

- **フレミング左手の法則**：電流 I が流れる導線中の線分 $\Delta\boldsymbol{s}$ が磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の磁場から受ける力 $\Delta\boldsymbol{F}$ は

$$\Delta\boldsymbol{F} = I\Delta\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B} \quad (14)$$

と表される．ここで $\Delta\boldsymbol{s}$ の向きは電流の向きと同じくとる．

- **ローレンツ力**：磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の磁場中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q をもつ荷電粒子に働く力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \quad (15)$$

と表される．

- 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の磁場中に置かれた磁気モーメント $\boldsymbol{M}$ に働く力のモーメント $\boldsymbol{N}$ は

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B} \quad (16)$$

と表される．

- **ビオ・サバールの法則**：導線上の微小線分 $\Delta\boldsymbol{s}$ を流れる電流 I が，そこから位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の点につくる磁束密度 $\Delta\boldsymbol{B}$ は

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \quad (17)$$

で与えられる．ここで $\Delta\boldsymbol{s}$ の向きは電流の向きと同じくとる．

- **ポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$**：電磁波のエネルギーの流れの密度を表すベクトルで，電磁波の電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ を用いて

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \quad (18)$$

と定義される．$\boldsymbol{S}$ の方向と向きは電磁波の進行方向と向きを表し，その大きさは単位面積を単位時間に流れる電磁波のエネルギーを表す．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{e}_z \quad (19)$$

と書き表される．ここで，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ は x, y, z 方向の単位ベクトルである．ローレンツ力を例にとって，力の各成分を求めてみよう．一様な磁場が z 方向に加えられているとし，$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とする．また，速度ベクトルは $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とする．この $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{v}$ を式 (15) に代入し，式 (19) を用いれば，ローレンツ力の x, y, z 成分は

$$F_x = qv_y B, \quad F_y = -qv_x B, \quad F_z = 0 \quad (20)$$

と求められる．

式 (19) の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の x, y, z 成分を書くときに間違いやすいのは添字とその順番である．そこで外積の各成分を間違いなく書く方法として行列式を使う方法がある．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は行列式で

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (21)$$

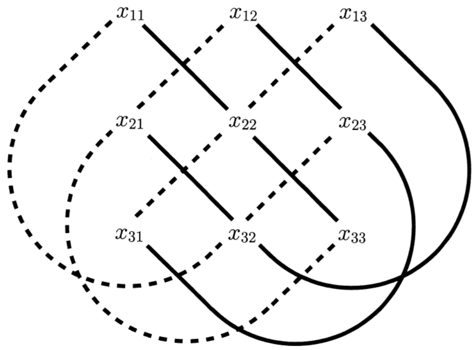


図 3　3 行 3 列の行列式とたすきがけの計算規則．実線の積は足し算，破線の積は引き算．

のように表される．右辺の行列式の 1 行目には x, y, z 方向の単位ベクトルを並べ，2 行目と 3 行目にはそれぞれ左側と右側のベクトルの x, y, z 成分を並べる．図 3 に示したように，3 行 3 列の行列式の計算には，良く知られた**たすきがけの規則**（行列要素の実線に沿った積はすべて加え，破線に沿った積はすべて引く）があり，機械的に計算することができる．すなわち

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{13}x_{22}x_{31} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{11}x_{23}x_{32} \tag{22}$$

となる．このようにして式 (21) の右辺の行列式を計算すると，式 (19) に一致することが分かる．前に述べたローレンツ力の場合には

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = q \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} \tag{23}$$

となり，これを計算すれば直ちに式 (20) の結果が得られる．このように，式 (21) は外積を正しく計算する便利な式である．

電磁気学の 4 つの基本法則，**電場に関するガウスの法則，磁束密度に関するガウスの法則，ファラデーの法則，マックスウェル・アンペールの法則**は以下の**マックスウェル方程式**で表される．

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho, \tag{24}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \tag{25}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{26}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{27}$$

ここで ρ と $\boldsymbol{J}$ はそれぞれ電荷密度と電流密度である．電束密度 $\boldsymbol{D}$ と電場 $\boldsymbol{E}$，および磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と磁場 $\boldsymbol{H}$ との間には，誘電率 ε と透磁率 μ を介して $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ の関係がある．また，電流密度と電場の間には電気伝導率 σ を介して $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ の関係がある．

マックスウェル方程式で使われるベクトル演算 div$\boldsymbol{A}$（**発散：divergence**）はベクトル量 $\boldsymbol{A}$ からスカラー量をつくる微分演算で

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{28}$$

で定義される．また，rot$\boldsymbol{A}$（**回転：rotation**）はベクトル量 $\boldsymbol{A}$ から別なベクトル量をつくる微分演算で

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{29}$$

のように定義される．ここでベクトル演算子（**ナブラ**と呼ばれる）

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{30}$$

を定義する．div$\boldsymbol{A}$ は演算子 $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ を x, y, z 成分にもつベクトル演算子 ∇ と $\boldsymbol{A}$ の内積のように考えることができるので，div$\boldsymbol{A}$ はよく

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A} \tag{31}$$

と書き表される．次に rot$\boldsymbol{A}$ は x, y, z 成分が複雑な演算で構成されるベクトル量をつくる演算であるが，式 (19) と (29) を見比べると，rot$\boldsymbol{A}$ はベクトル演算子 ∇ と $\boldsymbol{A}$ の外積の形になっていることが分かる．このため rot$\boldsymbol{A}$ は

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{32}$$

のように表すことができる．マックスウェル方程式に代表されるように，ベクトル量の回転（rot）は電磁気学では良く使われるベクトル演算である．式 (29) の回転の定義は覚えにくいが，行列式を用いた式 (32) は覚えやすく，回転を間違わずに計算できるので便利である．

最後にもう一つベクトルの回転を用いて定義される物理量である**ベクトルポテンシャル**を説明しよう．磁束密度 $\boldsymbol{B}$ は磁場を表す物理量であるが，磁場は

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{33}$$

で定義されるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ によって表すことができる．$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{A}) = 0$ は常に成り立つので，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は式 (25) で表される磁束密度に関するガウスの法則を満足する．ベクトルポテンシャルには $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}_0 = 0$ となる項 $\boldsymbol{A}_0$ を付け加えても式 (33) は成り立つので，ベクトルポテンシャルの選び方には任意性が残る．場所に依存しない一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対応するベクトルポテンシャルは，例えば

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}] \tag{34}$$

のように表すことができる．ここで $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ は空間の点を表す位置ベクトルである．式 (21) を用いて $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}$ を計算し，これを式 (32) に代入して $\nabla\times\boldsymbol{A}$ を求めれば，$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ が成り立つことが分かる．

このベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は教養課程を終えた後の専門課程での電磁気学で頻繁に使われる重要な物理量である．また，磁場中の荷電粒子の運動を量子力学で考えるときには必要不可欠である．

4. おわりに

本稿ではコンデンサーの電荷と電位，および時間変化する電流が流れる 2 つのコイルの自己誘導と相互誘導を行列を利用して説明した．電位やコイルを貫く磁束には重ね合わせの原理が成り立つので，多数の導体からなる導体系の電荷と電位の関係，および 3 つ以上のコイルがある場合の個々のコイルの誘導起電力と電流の時間微分の関係も行列を使って記述できる．このように行列は 2 つの異なる物理量をつなぐ架け橋である．また，ここで扱う行列には行列要素の添字を入れ替えても行列は変わらないという美しい関係（相反定理）がある．

電磁気学ではベクトルの外積で表される重要な物理量や法則がある．また，マックスウェル方程式のように，ベクトルの回転（rot）で表される重要な方程式や定義式がある．これらの x, y, z 成分を間違いなく書き表すための方法として，外積と回転を行列式で表すことを説明した．本稿が読者の方々の電磁気学の理解の一助になれば幸いである．

参考文献

1) 例えば，長岡洋介，『電磁気学 I』，岩波書店 pp.116.
2) 例えば，長岡洋介，『電磁気学 II』，岩波書店 pp.236.

（たなか・ひでかず，東京工業大学大学院理工学研究科）

量子力学と行列

スピン行列と密度行列を例として

倉辻 比呂志

1. はじめに

行列は数学的計算操作として物理に使われるが，行列それ自身が，量子状態という抽象的な概念を通して観測可能な力学量として登場することは量子力学以外にはない．我々の日常的知覚で直接関知できないのが量子力学であるということの所以とも言えよう．行列力学という形式によって量子力学に口火を切られたハイゼンベルクを嚆矢とする一連の歴史的偉業に対して，いまもって感嘆の念を覚えずにはいられない．

ところで歴史的に，行列で表され得る現象として光学における偏光がある．偏光とは古くさい話であると思われそうであるが，量子力学の形成の歴史において，光子の果たす役割は重大な意味をもっていた．実際，ディラックの『量子力学』の第一章において偏光を例に使って重ね合わせの原理を説明していることからもわかる．そこで，以下の話のきっかけとして，偏光に関する古典的事実を行列との関連を念頭において説明することから始めたい．偏光に関する詳細に関しては，文献 1, 2) をあげておく．

2. 光学活性と 2 × 2 行列

偏光は電磁波が横波であることの特性である．進行方向に垂直な面で振動することで，この面内にある 2 つの独立なベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を用いて，一定の波長をもった波の振幅が

$$\boldsymbol{f} = f_1\boldsymbol{e}_1 + f_2\boldsymbol{e}_2$$

のように表示される．このことは大学学部課程のテキストに述べられている．ここで $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ という形の 1×2 行列と見られることに注意．

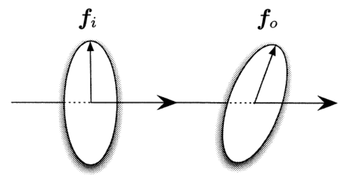


図 1　偏光変化の模式図.

さて，光は媒質の中を進むのであるからその情報を記述したい．これはある場所から偏光を入射して別の場所で観測したときに偏光の状態が変化するという形で記述される．それは，$\boldsymbol{f}_i \to \boldsymbol{f}_o$ という写像で表現される（図 1）．ベクトルからベクトルへの写像であるから，$\boldsymbol{f}_o = T\boldsymbol{f}_i$ と書かれて，T はちょうど 2×2 行列によって与えられることがわかる．偏光理論の分野ではこれは**ジョーンズ行列**と呼ばれるもので[3)]，媒質の様子を反映する重要なものである．例えば $T = c\boldsymbol{I}$ のように，スカラー行列（単位行列の定数倍）で書かれる場合には，$\boldsymbol{f}_o = c\boldsymbol{f}_i$ となり，偏光変化は何も起こらない．つまり，媒質は**等方的**である．あるいは，光学的に**不活性**であると考えられる．偏光変化が実際に生じる，あるいは光学的に**活性**[4)]であるため

には，媒質が**異方的**でなければならない．その場合，T はスカラー行列ではない一般の 2×2 行列で書かれる．

さて，媒質中の偏光変化を進行方向への変位に関する微分方程式に書かれることはすぐに思い浮かぶことであるが，それは行列で書かれた連立方程式

$$i\lambda\frac{d\boldsymbol{f}}{dz}=G\boldsymbol{f}$$

で書かれる．ここで，波長 λ と虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ をつけたのは便宜のためである．G は，2×2 行列で，電磁気における誘電率を拡張した誘電テンソルから導かれるものである．媒質が光を吸収しない場合には，それはエルミート行列で与えられる．ここで後のスピンへのつなぎのために，次のようなベクトル表示の変換をしておこう：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_+\\ \boldsymbol{e}_-\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\end{pmatrix},\quad U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}.$$

U は 2×2 ユニタリー行列である．これは，いわゆる直線偏光の基底 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ から，円偏光基底 $(\boldsymbol{e}_+,\boldsymbol{e}_-)$ への変換をしていることになる．$\boldsymbol{e}_+$ は左巻き偏光，$\boldsymbol{e}_-$ は右巻き偏光の基底を与え，量子論において光子のスピン状態に対応している．この表示を用いると，上の微分方程式は $\psi=U\boldsymbol{f}$, $H=UGU^{-1}$ を導入して

$$i\lambda\frac{d\psi}{dz}=H\psi \qquad (1)$$

と書かれて，これは z を時間と見れば，ψ を波動関数とするシュレーディンガー方程式の形になっている[5]．さらに，H はハミルトニアンの対応物で，2×2 であるからパウリスピン行列を用いて，$H=g_x\sigma_x+g_y\sigma_y+g_z\sigma_z$ と書かれることに注意する（次節以降を参照）．

3. スピン行列と 2 準位系

量子力学の体系が確立された過程において，スピンの果たした役割は波乱に富むものであったようである（朝永振一郎著：『スピンはめぐる』参照）．その深い意味付けは，最終的にディラックの相対論的量子力学で確定されたのであるが，形式的な意味としては，「2 つの量子状態」を抽象化したものと見ることができる．

(1) 基本事項：2 つの状態（エネルギーの大小が明白な場合は準位）をとりあげて，数式で表現すれば，ブラーケット記号を使って，$|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ と書ける．実際の電子の場合，スピンの上（下）向きを指定するために，$|\uparrow\rangle$ および，$|\downarrow\rangle$ と記すのが，しばしば慣例になっている．前節の左右の円偏光の状態にはスピン上（下）向きの状態に対応する．さて，量子力学の重ね合わせの原理に従えば，この 2 つの状態から，複素数の係数をかけて $|\psi\rangle=a|\psi_1\rangle+b|\psi_2\rangle$ が得られる．2 つの状態に制限された世界の力学を展開するためには，これら 2 つの状態を結びつける演算子として，すでに前節で述べたように，2×2 行列が自然である．磁場（$\boldsymbol{B}$）中の電子スピンの場合には，ハミルトニアンは，エルミート性を考慮すると，

$$H=g\begin{pmatrix}B_z & B_x-iB_y\\ B_x+iB_y & -B_z\end{pmatrix} \qquad (2)$$

と書かれる．ただし，$g=-\frac{e\hbar}{2mc}$ で，ボーア磁子（Bohr magneton）と呼ばれるものである．これは，パウリスピン行列

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad (3)$$

および，$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ を用いて，スピン演算子 $\boldsymbol{s}$ を $\boldsymbol{s}=\frac{\hbar}{2}\sigma$ によって定義すると，$H=\mu\cdot\boldsymbol{B}$ と書かれる．ただし，$\mu=\frac{e}{mc}\boldsymbol{s}$ はスピン磁気能率を表す．

以上のことは量子力学の学部コースで述べる基本的事項で，これ以上踏み込もうとすると具体的な物理の問題に立ち入ることになる．以下では少々ジャンプするが，2×2 スピン行列に帰着され得る「フェルミ粒子系」の問題をとりあげることにする．

(2) 多フェルミ粒子系のオモチャ：フェルミ粒子と特徴づけるキーワードは，パウリ原理である．

これは，**一つの状態に2個以上の粒子が占有することはできない**という大原則である．正確に言えば，この場合の状態は，いわゆる「1粒子状態」と言われるもので，この状態に粒子を分配したものが多粒子系の状態になる．極端な場合として，1個の粒子が一つの状態に入れる場合には，とり得る状態は，粒子が「ない」場合（$|0\rangle$），あるいは「ある」場合（$|1\rangle$）の2つの状態ができる．この2つの状態の間に，$|1\rangle = c^\dagger|0\rangle$, $|0\rangle = c|1\rangle$ なる演算子 $(c^\dagger, c)$ を導入し，

$$c^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

によって表示する．それらを，それぞれ生成，消滅演算子と呼ぶ．この間には，$cc^\dagger + c^\dagger c = 1$ の関係がある．これから，パウリ行列と $c^\dagger \to \sigma_+ \equiv \sigma_x + i\sigma_y$, $c \to \sigma_- \equiv \sigma_x - i\sigma_y$ なる関係にあることがわかる．さらに，パウリ原理は，$(c^\dagger)^2 = c^2 = 0$, いわゆるベキゼロ性によって表現されることがわかる．

以上の1状態1粒子の場合を多粒子に拡張するには，番号をつけて，$(c_i^\dagger, c_i)(i = 1, \cdots)$ のようなセットを導入するで実現される．これらは，i 番目の1粒子状態の生成消滅演算子で，次のような反交換関係をみたすことを要請する：

$$\begin{aligned} c_i c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i &= \delta_{ij}, \\ c_i c_j + c_j c_i &= c_i^\dagger c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i^\dagger = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

後者の2式は，ちょうど粒子の入れ替えに関する反対称性を表現したものになっている．多フェルミ状態は，$|\Psi_0\rangle$ を空っぽの状態とすると，n 個の粒子の状態は，$|\Psi\rangle = \prod_{i=1}^n c_i^\dagger |\Psi_0\rangle$ と書ける．以上述べたことは，フェルミ粒子系に対する第2量子化と言われるものに他ならない．

具体的に多体系の量子状態を記述するために，以下のようなオモチャ（toy model）を考えよう[6]．N 個の2準位系を並列に並べたものを考えて，それらを，上のレベル，$(a_i, a_i^\dagger)$，下のレベル $(b_i, b_i^\dagger)$ と呼ぶ．上のレベルに，エネルギー $\frac{\epsilon}{2}$，下のそれには $-\frac{\epsilon}{2}$ を振り分ける（図2）．粒子の間の相互作用は，例えば，下のレベルにある2つの粒子が衝突して，上のレベルに飛ばされるというようなものを想定すると，b が2つ消滅して，a が2個生成する，あるいはその逆のようなプロセスが考えられる．特殊な場合として，

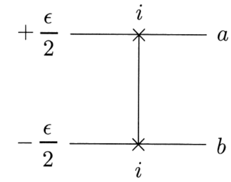


図2　2準位の基本単位．

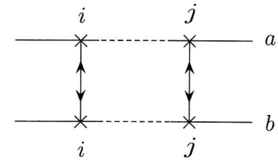


図3　上（下）にある i 番目の粒子と j 番目の粒子の散乱．

$$a_i^\dagger a_j^\dagger b_i b_j, \quad b_i^\dagger b_j^\dagger a_i a_j$$

をとりあげる（図3）．これは2体の衝突で4次式の生成消滅で表されるものであるが，粒子1体が外場の中で相互作用する場合を加える必要がある．それは，（このような言い方は正確ではないが）2次の生成消滅演算子で表現されることが予想される．そこで，量子状態の力学を決めるハミルトニアンとして，以下のように設定する：

$$H = \frac{\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{N}(a_i^\dagger a_i - b_i^\dagger b_i) - g\sum_{ij}(a_i^\dagger a_j^\dagger b_i b_j + \text{h.c.}). \tag{5}$$

ここで，g は相互作用の強さを表し，$g > 0$ とする．

このハミルトニアンから多体の量子状態（とくに基底状態）を導きたいのであるが，4次の項の存在によって一見して困難に見える．そこで，多体問題の標準的手法である**平均場近似**を適用して2次形式の形に直す[6]．まず，$\Delta = g\sum_i \langle a_i^\dagger b_i \rangle$, $\Delta^* = g\sum_i \langle b_i^\dagger a_i \rangle$ を定義する．ただし，$\langle A \rangle$ は，（これから決めるべき）基底状態での期待値を表す．そこで，平均場ハミルトニアンとして，

$$H_{mf} = \epsilon \sum_i (a_i^\dagger a_i - b_i^\dagger b_i) - \Delta \sum_i (a_i^\dagger b_i + b_i^\dagger a_i) \tag{6}$$

を導入する．ここで，$\Delta = \Delta^*$ と仮定した（つまり，Δ を実数に選ぶ）．$a_i^\dagger a_i - b_i^\dagger b_i \equiv \sigma_z$, $a_i^\dagger b_i \equiv \sigma_+$, $b_i^\dagger a_i \equiv \sigma_-$ なる置き換えをすれば，スピンと同じ交換関係をみたすので，準スピンと呼ばれる．この事実を用いれば，H_{mf} は，N 個の独立なスピンの問題と等価になり，ただちに固有状態は決定される．すなわち，2×2 行列で表示して

$$H_{mf} = \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} \epsilon & -\Delta \\ \Delta & -\epsilon \end{pmatrix}_i$$

と書かれて，それぞれのスピンの固有値は，$\lambda = \pm\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$ で，マイナス（基底状態）に対応する固有状態は，$(\alpha, \beta) = (\sin(\frac{\theta}{2}), \cos(\frac{\theta}{2}))$ で与えられる（ただし，$\epsilon = r\cos\theta$, $\Delta = r\sin\theta$： $r = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$）．これから，$i$ 番目の基底状態は

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle \tag{7}$$

となる．$|\uparrow\rangle, (|\downarrow\rangle)$ はそれぞれ，上（下）の準位が占有された状態で，$|\downarrow\rangle = |0\rangle$（下の準位が占有）と表せば，$|\uparrow\rangle = a_i^\dagger b_i|0\rangle$ と書き直される．従って，多体系の基底状態は，これらの積で与えられる：

$$|\Psi\rangle = \prod_i (\beta + \alpha a_i^\dagger b_i)|0\rangle. \tag{8}$$

この形は，ちょうど，**BCS タイプ**の波動関数である．最後に，self-consistent の条件より，はじめに定義した，Δ を決めよう．$\sum_i \langle\Psi|a_i^\dagger b_i|\Psi\rangle = N\alpha\beta$ であることを使うと

$$\Delta = gN \frac{\Delta}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}$$

となる．$\Delta \neq 0$ ゆえ，$\Delta = gN\sqrt{1 - (\epsilon/gN)^2}$ が得られる．この事実は，結合定数が十分強くて，1 体のエネルギー間隔 ϵ に対して，$\epsilon < gN$ を満たすときに，秩序パラメータ Δ がノンゼロの平均場が安定に生起することを示している．

4. 密度行列

これまでの議論は，フェルミ粒子系の平均場近似を，2×2 行列に帰着させるために，かなり「人工的につくられた」モデルに対して議論してきた．そこで，少し観点を変えて量子力学における行列という観点から平均場を眺める試みについてふれたい[7]．それは密度行列と言われるものである．正確には，ディラック密度行列と呼ぶべきもので，以下のように構成される：フェルミ粒子系の 1 粒子状態（ブラケット記号で）$\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$ を用いて，

$$\rho(x', x) = \sum_n \phi_n(x')\phi_n^*(x) \tag{9}$$

によって定義する．演算子を用いると，$\rho = \sum_n |n\rangle\langle n|$ と書かれる．ここで，状態 n に関する和は，1 粒子が最低状態からパウリ原理にしたがって最大エネルギー状態（フェルミ準位）までにわたる．

1 粒子状態は，平均場の中を動く粒子に対するシュレーディンガー方程式；$i\hbar\frac{\partial|n\rangle}{\partial t} = H[\rho]|n\rangle$ を満たし，これから

$$i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = [H, \rho] \tag{10}$$

が導かれることがわかる．ここで，$[A, B] = AB - BA$；すなわち交換子を表す．平均場のハミルトニアンは $H[\rho] = T + \mathrm{Tr}(V\rho)$ で与えられる．行列要素で書けば

$$\langle n|H|m\rangle = \langle n|T|m\rangle + \sum_{kl}\langle nk|V|ml\rangle \times \langle l|\rho|k\rangle. \tag{11}$$

T, V はそれぞれ，運動エネルギー演算子，2 体の相互作用を表す．また，Tr 記号は 1 粒子状態の固有状態に関して定義される．密度行列を用いると，力学量の期待値は，$\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(A\rho)$ で与えられる．

平均場は，一般に時間的に変動する．とくに，$\dot{\rho} = 0$ の場合は，フェルミ粒子はフェルミ準位までつまった定常な基底状態を表している．このとき，$\rho = \rho_0$ とおこう．ここで，外場（W とする）

による摂動が加わったとすると励起が発生する．それによる ρ の変動を ρ_1 とする．これを微小な摂動として扱うと，その運動方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\rho_1}{\partial t}=[H(\rho_0),\rho_1]+[\mathrm{Tr}(V\rho_1),\rho_0]+[W,\rho_0] \tag{12}$$

と書かれる．この手続きは，力学の問題でポテンシャルの底にある粒子に外力を加えて微小なエネルギーを与えたときの運動からの類推であると思えば大体間違いはないだろう．

以上の一般論を空間的に無限に広がった粒子系に適用しよう．この場合は，固有状態は運動量の固有状態となる．そこで，$|n\rangle\to|\boldsymbol{p}\rangle$ と置き換える．この表示によって運動方程式を行列要素で表すと

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}})\right)\langle\boldsymbol{p}|\rho_1|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\rangle$$
$$=(\theta(\boldsymbol{p})-\theta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}))$$
$$\times\left[W_q(t)+V(q)\sum_{p'}\langle\boldsymbol{p}'|\rho_1|\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}\rangle\right] \tag{13}$$

となることがわかる．ここで，$\theta(p)$ はステップ関数を表す（p がフェルミ準位 p_F 以下を占有しているとき 1 となりその他は 0 なる）．$W_q(t)$ は時間に依存する外場のフーリエ変換である：$W_q(t)=\int\exp[iqx]W(x,t)dx$．さらに，2 体相互作用は中心力の場合には，その行列要素は，

$$\langle\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4|V|\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2\rangle=V(|\boldsymbol{q}|)$$

のように，運動量移行：$\boldsymbol{q}=(\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4)-(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)$ で与えられることがわかっている．これらの事実から，さらに，外場を $W(t)=W^\dagger\exp[-i\omega t]+\mathrm{h.c.}$ のように時間振動するものに選ぶ．かつ，$\rho_1(t)=\rho_1\exp[-i\omega t]+\mathrm{h.c.}$ とおくと，外場によるエネルギー吸収は $W(t)$ の期待値の摂動部分 ρ_1 からの寄与によって与えられる（計算は初等的であるが少し煩雑である）：

$$\mathrm{Tr}(W^\dagger\rho_1)=\sum_q\frac{|W_q|^2S(\boldsymbol{q},\omega)}{1-V(|\boldsymbol{q}|)S(\boldsymbol{q},\omega)}. \tag{14}$$

ここで，

$$S(q,\omega)=\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{\Theta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}})}{\omega^2-(E_{\boldsymbol{p}}-E_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}})^2}, \tag{15}$$

$\Theta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\equiv\theta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})[1-\theta(\boldsymbol{p})]$．強制振動の類似から，共鳴周波数は $\mathrm{Tr}(W^\dagger\rho_1)$ の極から決まる：

$$1-V(|\boldsymbol{q}|)S(\boldsymbol{q},\omega)=0. \tag{16}$$

この方程式を分析することにより，ω と $\boldsymbol{q}$ の関係が出てくる（分散関係）．これが集団励起を与える．とくにクーロン力の場合には，$V(|\boldsymbol{q}|)\simeq\frac{1}{q^2}$ で，ω はプラズマ振動数になることが知られている．また，短距離の斥力の場合には $\omega\simeq cq$ となり，これはフォノン型スペクトルである．これがランダウのゼロ音波と言われるものである．

以上の議論は，多体問題の典型的な理論の一つである RPA（乱雑位相近似；random phase approximation）[8)] と言われるものを密度行列の観点から定式化し直した Goldstone–Gottfried によるものである．集団励起の理論は超伝導 BCS 理論における P.W. Anderson のプラズマ励起の機構，Goldstone mode とつながって場の理論へ転用されていく道筋をたどることになる．

コメント：上で扱ったディラックの密度行列より一般的なフォン・ノイマンの密度行列についてふれておこう．つまり，一般のシュレーディンガー方程式；$i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t}=H|\Psi\rangle$ に対して，すべての状態の集合 $\{|\Psi\rangle\}$ を考えて，この集合に関する確率 P_Ψ なるものを導入する．これに対して

$$\rho=\sum_\Psi P_\Psi|\Psi\rangle\langle\Psi| \tag{17}$$

でもって一般の密度行列と定義する．容易にわかるように，ディラックの密度行列に対する運動方程式（Liouville 方程式と呼ばれる）と同じ形のものが得られる．とくに，特定の状態 Ψ だけが実現する場合；すなわち，$P_\Psi=1$ の場合が純粋状態と呼ばれる．

5. 偏光再論

一般の密度行列の適用例として，きっかけに取

り上げた偏光の問題を再考しよう．量子多体系からずいぶんと離れてしまい，かつ筆者の好みも反映するが，2×2 行列の有用性を示す例として教訓的なテーマと思えるのである．

第2節で与えた2成分の偏光状態を形式的に量子力学的状態と見立ててケット記号 $|\Psi\rangle$ に対応させると，純粋状態での密度行列は，スピン行列を用いて，

$$\begin{aligned}\rho &= \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}(\psi_1^*, \psi_2^*) \\ &= S_0\boldsymbol{I} + S_x\sigma_x + S_y\sigma_y + S_z\sigma_z\end{aligned}$$

のように書かれる．ここで，$S_0 = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2$，かつ

$$\begin{aligned}S_x &= \psi_1^*\psi_2 + \psi_2^*\psi_1, \quad S_y = i(\psi_1^*\psi_2 - \psi_2^*\psi_1), \\ S_z &= \psi_1^*\psi_1 - \psi_2^*\psi_2. \end{aligned} \qquad (18)$$

この表式は，偏光状態を記述する重要な変数である，**ストークスパラメータ**と呼ばれるものである．一方，偏光変化を記述するシュレーディンガー型方程式 (1) より導かれる ρ の方程式，$i\lambda\frac{d\rho}{dz} = [H, \rho]$ に，この変数を用いると，スピン行列の交換関係に注意して，計算することにより

$$\lambda\frac{d\boldsymbol{S}}{dz} = \boldsymbol{S}\times\boldsymbol{G} \qquad (19)$$

が導かれる[5)]．ここで，$\boldsymbol{G} = (g_x, g_y, g_z)$ は，いわば，「擬磁場」というべきもので，スピンもどきのストークスパラメータが，あたかも磁場中のスピンのように運動するかのように扱えることを示している．

とくに，光波の進行方向に平行な一様磁場を加えた場合に生じるファラデー効果の場合は，$\boldsymbol{G} = (0, 0, g)$ のように与えられる．ここで，$g = \gamma B$ で γ は Verde 定数と呼ばれる．これから，スピンの歳差運動と類似的に，ストークスパラメータの空間で z 軸まわりで回転することがわかる．この回転角を測れば磁場の強さがわかる．また，光学異性物質の場合には，g は左右の屈折率の差に比例する量になり，このことから偏光面の回転から，例えば，砂糖の量を測定することができる．

6. 結び

量子力学は，演算子と状態ベクトルという抽象的な形式で定式化されている．これを具体的な形で表現すると行列（一般には無限次元の）の演算に帰着する．その意味では，「量子力学と行列」という括りでは，いささか漠然としている．行列独自の特性を生かした対象として，例えば場の理論でも使われている行列を確率変数とするランダム行列理論などが今日的テーマとしてあげられるが，本稿では大学学部の知識で近づくことが可能な 2×2 のスピン行列と密度行列について，主としてフェルミ粒子系への応用という観点から説明した．さらに，全く別の側面から偏光をスピンとの類似でとりあげた．結果的に，行列はダシとして使われることになってしまった．しかし，このような見方が量子力学の学習に際して何らかのヒントが得られる一助になれば幸いである．

注と参考文献

1) M. ボルン，E. ウルフ：『光学の原理』．1974, 草川徹，横田英嗣訳．東海大学出版会．
2) L. ランダウ，E. リフシッツ，『電磁気学 2』1968,（理論物理学教程 vol.8）井上他訳，東京図書．
3) C. Brosseau, "Fundamentals of Polarized Light", John Wiley (1998).
4) 狭義の光学活性と呼ばれるものは，光学異性体からなる物質において，偏光面が，掌性（左右非対称性：カイラリティ（chirality）と呼ばれる）の大きさに比例して傾く現象を言う．
5) H. Kuratsuji and S. Kakigi, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 1888; 倉辻比呂志，『液晶』，vol.**3**. 279, 1999.
6) 以下で扱うのは，励起子凝縮理論を簡略化したものである．原論文として，D. Jerome, T.M. Rice, and W. Kohn, *Phys. Rev.* **158** (1967) 462.
7) ここで述べる内容は以下に基づく：H. Ehrenreich and N.H. Cohen, *Phys. Rev.* **115** (1959) 786; J. Goldstone and K. Gottfried, *Nuovo Cimento*, **13** (1959) 849.
8) D. Bohm and D. Pines, *Phys. Rev.* **92** (1953) 609; K. Sawada, *Phys. Rev.* **106** (1957) 372.

（くらつじ・ひろし，立命館大学総合理工学研究機構）

カオスと行列

周期軌道/σ模型対応

西垣　真祐

1. はじめに

Einstein の（今となっては）著名な 1917 年論文[1)]に端を発する「量子カオス論」の目標の一つは，古典極限がカオス的である多自由度の量子力学系について，エネルギー準位の統計的挙動を解明することにある[2)]．その手段としては従来，本特集の主題である「行列」を自由度とする**ランダム行列理論**（Dyson[3)]）/**非線形 σ 模型**（Wegner[4)], Efetov[5)]），および経路積分の半古典近似に依拠した**周期軌道論**（Gutzwiller[6)]）という 2 形式がほぼ独立に発展してきた．前者は系の詳細を捨象したブラックボックスから普遍的性質を抽出する熱力学的手法であるのに対し，後者は個々の古典軌道に適切な重みを付して総和する統計力学的手法であって，準位揺動の普遍的な部分と系に固有な成分の双方を扱えるという特徴を持っている．本稿では，量子カオス論を語るツールとしての行列値変数の積分について解説し，巨視的な熱力学が微視的な統計力学から自然に導かれるように，ランダム行列の普遍的準位統計がカオス系の周期軌道論から導かれる様を描写したい．

2. 量子カオス：周期軌道論

まずは対象とする物理に馴染んでいただくため，行列は後回しにして周期軌道論を駆け足で紹介する[7)]．周期軌道論の始点は，量子力学におけるハミルトニアン演算子 H のレゾルベント（Green 関数の対角和）に対する経路積分表示

$$\mathrm{tr}\,\frac{1}{E_+ - H} \equiv \int d\boldsymbol{Q} \langle \boldsymbol{Q}|\frac{1}{E_+ - H}|\boldsymbol{Q}\rangle$$
$$= -\frac{i}{\hbar}\int d\boldsymbol{Q}\int_0^\infty dT \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}ET}\int_{\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{q}(T)=\boldsymbol{Q}} \mathcal{D}\boldsymbol{q}\ \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}W[\boldsymbol{q}]}. \tag{1}$$

である．ここで $W[\boldsymbol{q}] \equiv \int_0^T L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})dt$ は作用であり，経路積分 $\int_{\boldsymbol{q}(0)=\boldsymbol{Q}}^{\boldsymbol{q}(T)=\boldsymbol{Q}} \mathcal{D}\boldsymbol{q}$ は時間 T 後に座標 $\boldsymbol{Q}$ に回帰するすべての経路にわたる和を表す．T 積分を収束させるため E に微小な正の虚部を持たせたことを E_+ と記した．古典量である $W[\boldsymbol{q}]$ は $\hbar$ と比べて極めて大きいとすると，(1) 式の経路積分は停留条件 $\delta W[\boldsymbol{q}] = 0$ を満たす古典軌道 a の周りの Gauss 型積分の和で近似できる（WKB 近似）．さらに起終点の座標 $\boldsymbol{Q}$ および回帰時間 T についての積分にも WKB 近似を適用すると，前者は運動量 $\boldsymbol{p}(T) = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{q}(T)}, \boldsymbol{p}(0) = -\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{q}(0)}$ にも回帰性 $\boldsymbol{p}(T) = \boldsymbol{p}(0)$ を課し，後者は $W_a(T)$ から簡略作用 $S_a(E) = \oint_a \boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{q}$ への Legendre 変換を行う．

ここまでは力学系を問わない一般論であるが，以下では本稿の主題であるカオス系に話を限ろう．カオス的な力学系とは，大まかに言うと力学的自由度の数に比べて保存量の数が少ないために変数分離ができず，初期条件の微小な差が時間とともに指数関数的に拡大する系を指す（図 1）[6)]．このとき周期軌道は位相空間中で孤立して分布するので，

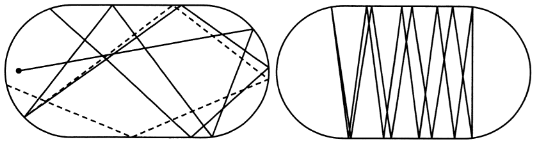


図1　スタジアム型ビリヤードにおける初期条件の微小な差の拡大（左）と周期軌道の例（右）.

定理1（Gutzwiller の跡公式）　レゾルベントは周期軌道に渉る離散和として半古典近似される：

$$\mathrm{tr}\,\frac{1}{E_+ - H} \simeq - i\pi\bar{\rho}(E) - \frac{i}{\hbar}\sum_{a\in\text{周期軌道}} T_a(E)\,F_a(E)\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S_a(E)}. \tag{2}$$

ここで軌道の周期 T_a は $\int d\boldsymbol{Q}$ のうち軌道に沿う成分（WKB 近似は適用できず厳密に扱う）に由来し，また安定性振幅 $F_a = |\det(M_a - I)|^{-1/2}$（$M_a$ は周期軌道 a に沿うモノドロミー行列）は軌道に垂直な成分の Gauss 型積分によるプレファクターとして現れる*1)．平均状態密度 $\bar{\rho}(E)$ に比例する第1項は長さ0の周期軌道の寄与である．作用と周期の関係 $\frac{d}{dE}S_a(E) = T_a(E)$ を用いて (2) 式を不定積分すると，特性多項式 $\Delta(E) \equiv \det(E-H)$ に対する半古典近似式を得ることもできる：

$$\Delta(E_+) \propto \prod_a \exp\Big(-F_a(E)\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}S_a(E)}\Big). \tag{3}$$

■　3. カオスにおける双対性（予告編）　■

量子カオス論における準位相関関数は，エネルギー準位の数直線上に設けた，全体から見ると小さな幅であるが十分多数の準位を含む「窓」の中の数個の準位の相関を測定し，窓の位置についてスペクトル全体にわたる平均をとったものとして定義される．本稿では2つの固有値の相関を測る特性多項式の積

$$Z(\epsilon_+, \epsilon'_-) \equiv \left\langle \Delta\Big(E + \frac{\epsilon_+}{\bar{\rho}(E)}\Big)\Delta\Big(E + \frac{\epsilon'_-}{\bar{\rho}(E)}\Big)\right\rangle_E$$

を例として考える．なおスペクトル平均 $\langle\cdots\rangle_E$ をとる前に，上のように中心値 E の窓に属するエネルギー変数は窓中の平均状態密度 $\bar{\rho}(E)$ で割ることにより平均準位間隔を1に規格化（アンフォールド）する必要がある．これに (3) 式およびその複素共役を代入して展開すると，$Z(\epsilon_+, \epsilon'_-)$ は

$$(-1)^{|A|+|B|} F_A F_B^* \,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar\bar{\rho}}(\epsilon T_A - \epsilon' T_B)}\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(S_A(E) - S_B(E))}$$

の形の項の線形和で書かれる．ここで周期軌道の組（準周期軌道）を $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ と記し，その作用 S_A と周期 T_A は個々の成分の和，安定性指数 F_A は個々の指数の積とした．これらの項は，エネルギー殻 $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = E$ 上の複数の周期軌道の作用の符号付き和があらゆる E に対して $O(\hbar^1)$ になる場合に限りスペクトル平均後に0でない寄与を与える．個々の軌道の作用が $S_a \gg \hbar$ であることを考慮するとこの現象が無関係な周期軌道の間に偶然起こるとは考えられず，周期軌道が組として完全に一致する（対角項）か，あるいは高々微小な「組替え」部分を除いて一致する場合（非対角項）のみに起こり得る．従って準位相関関数は，それぞれが経路積分 (1) の鞍点である図1のような周期軌道の組の総和として表されることに気付く．場の量子論を学習中の読者の中には，この形から Feynman 図形を連想する方もおられるであろう．「ではどのような場の理論の Feynman 図形か？」との問いは自然な疑問であり，これに対する答えが本特集の主題の「行列」なのである．

量子多体系の理論 A の摂動論に現れる素励起（例えば Thirring 模型のフェルミオン場）と理論 B の古典解（例えば sine-Gordon 理論のキンク解）の間の対応を通じて両理論が同一視できる場合，理論の組は**双対性**を持つと言われ，理論物理学における現代的なキーワードとなっている．双対的な理論の組は統計模型から弦理論に至る諸分野において広範に発見されており，両側の理論を相補的かつ包括的に捉えることを可能にする．Haake らのグループ[8]は最近，量子カオス論においても，古典解サイドには周期軌道の組（図2），および摂動論サイドには行列値変数の積分である非線形 σ 模型の Feynman 図形（図3）を配する1対1対応を通じた両形式の等価性を発見し，これを通じて量

*1)　Maslov 指数（1周期中の反射の回数）は F_a に含めた．

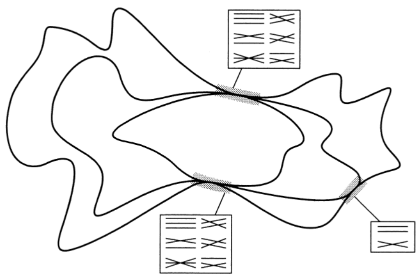


図 2　組替え部分を除いて一致する周期軌道の組.

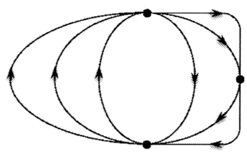


図 3　非線形 σ 模型の Feynman 図形.

子カオス系の準位統計がランダム行列の普遍性に属すること（Bohigas–Gianonni–Schmit 予想[9]）を半古典近似の枠内で証明した．この重要な成果を述べるための準備として，行列の分類学に一旦話題を転じる．

4. TCP 対称性

古典力学における時間反転対称性とは，時間の進行方向を反転する変換 $t \mapsto -t$ に対して運動方程式ないしラグランジアンが形を変えず，従ってある軌跡に沿う運動があればその軌跡を逆行する運動も可能であることを意味する（図 4）．一方，磁場 $\boldsymbol{B}$ 中を運動する荷電粒子に働く Lorentz 力 $\boldsymbol{F} = q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$ は，速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{r}}$ を反転すると向きが変わるため軌道の逆行は許されず，時間反転対称性を持たない例を与える．



図 4　Bach「音楽の捧げもの」逆行カノン．同時進行する 2 声の対旋律は互いの時間反転になっている．

量子力学において系のハミルトニアン H は正準量子化により，状態ベクトルの張る Hilbert 空間 V に作用するエルミートな線形演算子ないしエルミート行列に昇華される．Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) = H\,\psi(t) \tag{4}$$

を満たす $\psi(t) \in V$ が与えられたとき，時間反転された変数 $t' = -t$ を持つ $\psi'(t') \in V$ で (4) と同じ形の方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt'}\psi'(t') = H\,\psi'(t')$$

を満たすものが V の適当な自己同形 $\mathcal{T} : \psi(t) \mapsto \psi'(t') = \mathcal{T}\psi(t)$ によって必ず作れれば，この量子系は時間反転対称性を持つと言えるだろう．このとき

$$-(\mathcal{T}^{-1}i\mathcal{T})\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) = (\mathcal{T}^{-1}H\mathcal{T})\psi(t)$$

となるが，H があらわに t に依存しない場合は $[H, \mathcal{T}] = 0$ すなわち $\mathcal{T}^{-1}H\mathcal{T} = H$ であるから，(4) と比較して $\mathcal{T}$ は反ユニタリー性 $\mathcal{T}^{-1}i\mathcal{T} = -i$ を持たなければならない．このような $\mathcal{T}$ は必ず，複素共役操作 K とユニタリー行列 Ω の作用の合成 $\mathcal{T} = K\Omega$ として表される．$\mathcal{T}$ を 2 回繰り返す操作は物理を全く変えず，従って高々状態ベクトルの位相を一斉に変化させる $\mathcal{T}^2 = \mathrm{e}^{i\alpha} \times$ (単位行列 I) になる必要がある（対合的対称性）．この位相の取り得る値は，$\mathcal{T}$ を 3 回繰り返せば

$$\mathrm{e}^{i\alpha}\mathcal{T} = \mathcal{T}^3 = \mathcal{T}\mathrm{e}^{i\alpha} = \mathrm{e}^{-i\alpha}\mathcal{T} \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{e}^{i\alpha} = \pm 1$$

となるため，次の分類が成り立つ．

分類 1（Dyson の三道説[11]）　ハミルトニアン行列 H は，対合的な反ユニタリー変換 $\mathcal{T}$ に対して下の 3 通りのいずれかを満たす：

$$[H, \mathcal{T}] \begin{cases} \neq 0 \\ = 0, \quad \mathcal{T}^2 = \pm I \end{cases} . \tag{5}$$

この分類法は純粋に代数的であり，必ずしも $\mathcal{T}$ が物理的に時間反転を表す必要はない．対合的変換という代数的観点からは，分類 1 における交換子 [,] を反交換子 { , } に，あるいは反ユニタリーをユニタリーに置き換えた場合も等しく考え得る[10]．

ただし，

① 「ユニタリーと交換」という条件 $[H,\Omega]=0$ は Ω の ±1 の固有空間ごとに H を直和分解するだけであるから，実質的な分類は「反ユニタリーと交換」「反ユニタリーと反交換」「ユニタリーと反交換」の3通りである．これらの変換をそれぞれ $\mathcal{T},\mathcal{C},\mathcal{P}$ と記す．

② このうちの2つの対称性を持つ行列は自動的に3つ目を持つので（反ユニタリーな $\mathcal{T}$ と交換し $\mathcal{C}$ と反交換する行列はユニタリーな $\mathcal{P}\equiv\mathcal{TC}$ と反交換する），持ち得る対称性の数は0, 1, 3である．

③ 反ユニタリー変換の2乗 $\mathcal{T}^2$ の位相は再定義 $\mathcal{T}\to e^{i\beta}\mathcal{T}$ の下で不変であり，この自由度を利用して $\mathcal{T},\mathcal{C},\mathcal{P}$ を互いに可換にすることができる．

④ ユニタリー変換の2乗 $\mathcal{P}^2$ の位相は $\mathcal{P}\to e^{i\gamma}\mathcal{P}$ によって任意に変化させられるので，慣習上 $\mathcal{P}^2$ または $(\mathcal{TCP})^2=+I$ となるように選ぶ．以上より，

分類2（Zirnbauerの十道説[12]） ハミルトニアン行列 H は，対合的な反ユニタリー変換 $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$, およびユニタリー変換 $\mathcal{P}$ に対して，(5)および

$$\{H,\mathcal{C}\}\begin{cases}\neq 0\\ =0,\quad \mathcal{C}^2=\pm I\end{cases},\quad \{H,\mathcal{P}\}\begin{cases}\neq 0\\ =0\end{cases}$$

に応じて表1の10通りに細分類される．

表1 対合的対称性によるハミルトニアンの分類．

クラス	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$	行列の属性
A				$H:\mathbb{C}$-エルミート
AI	$+$			$H:\mathbb{R}$-対称
AII	$-$			$H:\mathbb{H}$-自己随伴
BD		$+$		$Z:\mathbb{C}$-歪対称（純虚数）
C		$-$		$Z:\mathbb{C}$-対称
AIII			$+$	$Z:\mathbb{C}^{N\times N'},\quad W=0$
BDI	$+$	$+$	$+$	$Z:\mathbb{R}^{N\times N'},\quad W=0$
CII	$-$	$-$	$+$	$Z:\mathbb{H}^{N\times N'},\quad W=0$
DIII	$-$	$+$	$-$	$Z:\mathbb{C}$-歪対称，$W=0$
CI	$+$	$-$	$-$	$Z:\mathbb{C}$-対称，$\quad W=0$

表1の右欄にはハミルトニアン行列をブロック表示

$$H=\begin{pmatrix}W & Z^\dagger\\ Z & -W^T\end{pmatrix}$$

したときの Z および W の性質を，左欄には H が属するLie代数のCartan分類記号を記した．一例としてクラスAIIIの行列は，$\mathcal{P}$ の形を $\begin{pmatrix}I_N & 0\\ 0 & -I_N\end{pmatrix}$ と定めればこれと反交換するエルミート行列という条件から

$$H=\begin{pmatrix}0 & Z^\dagger\\ Z & 0\end{pmatrix},\quad Z\in\mathbb{C}^{N\times N} \tag{6}$$

の形をとる．その他のクラスについても，例えば $\mathcal{C}^2=-I$ となる $\mathcal{C}$ をあらわに $K\begin{pmatrix}0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix}$ と行列表示するなどして，中欄のTCP対称性を有するハミルトニアン行列が右欄の性質を持つことを簡単に確認できる．なお $\mathcal{C}$ または $\mathcal{P}$ 対称性を持つpost-Dysonクラス（A, AI, AII以外）の行列は反交換性 $\mathcal{C}^{-1}H\mathcal{C}=-H^T$ または $\mathcal{P}^{-1}H\mathcal{P}=-H$ のために非零の固有値が正負の対をなす．「カイラル」と呼ばれるこれらのクラスには，ゲージ群の種々の表現に付随するDirac演算子（AIII, BDI, CII），および超伝導–常伝導接合におけるBogoliubov–de Gennesハミルトニアン（BD, C, DIII, CI）などの重要な物理例が知られている．

5. ランダム行列：色・香り変換

前節では量子系のハミルトニアンを第一義的に考えて一つ固定し，それから導かれる対合的対称性を分類したが，この視点を逆転するとどうなるであろうか．すなわち，**対合的対称性こそが物理的対象の本質である**として第一義的に考え，個々のハミルトニアンはその対称性を満たす中から確率的に導かれるとするのである．このとき観測可能量は必然的に，特定の対称性を持つ行列の集団全体にわたって平均操作をとること（アンサンブル平均）により生じる分布に従う．Wignerのこの思想に基づいてDysonはランダム行列の理論を構築した[3,13]．例えばクラスAIIIのランダム行列集団とは，ユニタリー群 $U(2N)$ へのCartan埋め込み

$$U=\mathcal{P}^{-1}(I+iH)\mathcal{P}(I+iH)^{-1}=\frac{I-iH}{I+iH} \tag{7}$$

を通じてその接平面への立体射影座標 (6) を持つ対称空間 $U(2N)/U(N)\times U(N)$ に，確率測度として Haar 測度 $d\mu(Z)=\prod dZ\,dZ^\dagger/\det(I+Z^\dagger Z)^{2N}$ を付した確率変数の集団として定義される．

スペクトル平均とアンサンブル平均の等価性仮説

$$\Big\langle\prod_k \mathrm{tr}\,\frac{1}{E+\frac{\epsilon_k}{\bar\rho(E)}-H}\Big\rangle_E=\Big\langle\prod_k \mathrm{tr}\,\frac{1}{E+\frac{\epsilon_k}{\bar\rho(E)}-H}\Big\rangle_H$$

を認めれば，例えばクラス AI の対合的対称性を持つ特定のカオス的ハミルトニアンの準位統計はクラス AI のランダム行列集団にわたってアンサンブル平均された相関関数で記述されると予想される．ある対合的対称性を持つ行列集団に課す確率測度の緩やかな変更に対して準位揺動の振舞いが安定である（普遍性）という事実が，ランダム行列理論のこの有意性を支えている*2)．この普遍性の起源が，ランダム行列集団における**連続的対称性の自発的破れ**にあることを見るため，2 種類の行列値変数の積分，より正確には 2 つの対称空間上の積分の等価性を示そう．ある確率測度に従って分布するユニタリー行列 U の固有値の相関関数を算出するためには，プローブとして固有値の位置に特異性を持つレゾルベント $\mathrm{tr}\,(I-\mathrm{e}^{-i\theta}U)^{-1}$ や特性多項式 $\Delta(\theta)\equiv\det(I-\mathrm{e}^{-i\theta}U)$ の積の期待値を求める必要がある．行列式は Grassmann 数のベクトルを用いて

$$\Delta(\theta)=\int d\psi\,d\bar\psi\,\exp\Big(\bar\psi_i\big(I-\mathrm{e}^{-i\theta}U\big)_{ii'}\psi_{i'}\Big)$$

と指数化できる．これらの積の期待値を念頭に置いて Zirnbauer は，次式に代表される拡張された Hubbard–Storatonovich 変換公式を示した[14]．

定理 2（色・香り変換）*3)　添字 $i=1,\ldots,N_C$ および $f=1,\ldots,N_F$ を持つ Grassmann 数 ψ_i^f などに対して下式が成立する*4)．

$$\int_{U(N_C)} dU\exp\Big(\bar\psi_i^f U_{ii'}\chi_{i'}^f-\bar\chi_i^f U_{ii'}^\dagger\psi_{i'}^f\Big)$$
$$=\int_{\mathbb{C}^{N_F\times N_F}}\frac{dZ\,dZ^\dagger}{\det(I+ZZ^\dagger)^{2N_F+N_C}}$$
$$\exp\Big(\bar\psi_i^f Z^{ff'}\psi_i^{f'}+\bar\chi_i^f Z^{\dagger ff'}\chi_i^{f'}\Big).\quad(8)$$

以下の議論における本質的な要素を含むので略証を示す．便宜上，添字 i を色（カラー），f を香り（フレイバー）と呼ぶ．色および 2 重に拡大した香りの変換を統合した Lie 群 $G=U(2N_FN_C)$ を考え，添字 $F=\pm1,\ldots,\pm N_F$ を導入して G の生成子を $T_{ii'}^{FF'}$ と記す．香り 1 重項の $\{\sum_F T_{ii'}^{FF}\}$ が生成する $G_C=U(N_C)$ と色 1 重項の $\{\sum_i T_{ii}^{FF'}\}$ が生成する $G_F=U(2N_F)$ は G 中で互いに可換な最大の部分群になっている．

次に，フェルミオン的生成･消滅演算子 $\{b_i^{-f},b_{i'}^{+f'}\}=\{\bar b_i^{+f},\bar b_{i'}^{-f'}\}=\delta_{ii'}\delta^{ff'}$ によって真空状態ベクトル $|0\rangle$（$b_i^{+f}|0\rangle=\bar b_i^{-f}|0\rangle=0$ を満たす）の上に作られる Fock 空間 V における G の表現を写像 $\rho:G\ni\exp(\theta_{ii'}^{FF'}T_{ii'}^{FF'})\mapsto\exp(\theta_{ii'}^{FF'}\bar b_i^F b_{i'}^{F'})\in\mathrm{End}(V)$ によって定義する．このとき，色 1 重項状態が張る V の部分空間 $\rho(G_F)|0\rangle$ への射影演算子 P は定義により

$$P=\int_{U(2N_F)} dg\,\rho(g)|0\rangle\langle0|\rho(g)^\dagger\quad(9)$$

であるが，$\bar b_i^{+f}b_i^{+f'}$ および $\bar b_i^{-f}b_i^{-f'}$ で生成される対角部分群 $H=U(N_F)\times U(N_F)$ は真空 $|0\rangle$ を不変に保つため，上の積分域は実際に真空を回転させる $\bar b_i^{+f}b_i^{-f'}$ および $\bar b_i^{-f}b_i^{+f'}$ が生成する右剰余類 $U(2N_F)/U(N_F)\times U(N_F)$ にまで縮小できる．この対称空間を (7), (6) のように複素行列 Z で座標づける．他方で，任意の V のベクトルからその色 1 重項成分への射影はそのベクトルに G_C 全体を作用させて平均する操作によっても実現できるから，P はもう一つの積分表示

$$P=\int_{U(N_C)} dU\,\rho(U)\quad(10)$$

をもつ．演算子 P に対する 2 つの表示 (10) と (9) を $\exp(-\psi_i^f\bar b_i^{+f}+\bar\psi_i^f b_i^{-f})|0\rangle$ などのコヒーレント状態で挟んだ行列要素が (8) 式の左辺および右辺である．□

*2)　もし確率測度を Haar 測度から僅かに変更させるにつれて準位揺動が鋭敏に反応するのであれば，特定の確率集団から得られた量子カオス系に対する予言はそもそも信頼できない．

*3)　ψ などをクォーク場とする場の理論として式 (8) を眺めると，左辺は U をグルーオン場とするゲージ理論，右辺は Z をメソン場とする有効理論と見なせるためにこの名称がある．

*4)　dU, dg はユニタリー群の Haar 測度（不変測度）を表す．

表 2　対称空間上の積分の間の等価性.

クラス	色行列変数	香り行列変数
A	U_N	$U_{n+n'}/U_n \times U_{n'}$
AI	U_N/O_N	$Sp_{n+n'}/Sp_n{\times}Sp_{n'}$
AII	U_{2N}/Sp_N	$O_{n+n'}/O_n \times O_{n'}$
BD	O_N	O_{2n}/U_n
C	Sp_N	Sp_n/U_n
AIII	$U_{N+N'}/U_N \times U_{N'}$	U_n
BDI	$O_{N+N'}/O_N \times O_{N'}$	U_{2n}/Sp_n
CII	$Sp_{N+N'}/Sp_N{\times}Sp_{N'}$	U_n/O_n
DIII	O_{2N}/U_N	O_n
CI	Sp_N/U_N	Sp_n

上の略証において，Lie 群 G 自体，およびその中で可換な最大の部分群の組 (G_C, G_F) の選択は任意であり，可能なすべての (G, G_C, G_F) の 3 つ組に対して式 (8) の類似物が成立する．これらを慣習上「色」サイドの対称空間の接空間が表 1 に掲げた 10 種類のハミルトニアン行列の族になるように列挙すると，色・香り変換の両辺に現れるコンパクトな対称空間は表 2 の 10 組で尽くされる．行列変数の対応関係はその構成法から反射的（上半分と下半分は色と香りが逆転）になっている．なお，双基本表現量の ψ_i^f などには Grassmann 数成分 (Gr) と通常の $\mathbb{C}$ 数成分が混在していても良く，その場合には超行列（$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathrm{Gr} \\ \hline \mathrm{Gr} & \mathbb{C} \end{array}\right)$ 型の $\mathbb{Z}_2$-graded な行列変数）の積分間の等式が得られる．

■　6. 対称性の破れと σ 模型　■

前節で示した色・香り変換を通じて，ランダム行列において自発的対称性の破れが起こることを示そう．(8) 式の左辺に注目すると，指数部分は香りについて対角的な $\bar{\psi}_i^f U_{ii'} \chi_{i'}^f$ と $\bar{\chi}_i^f U_{ii'}^\dagger \psi_i^f$ の和であるから，変換 $(\bar{\psi}, \chi)$ および $(\bar{\chi}, \psi)$ の組を独立にユニタリー変換する群 $H = U(N_F) \times U(N_F)$ の下で不変である．対称性の破れを見る常として，微小なパラメータ m を含みこの対称性を僅かに破る因子 $\exp m(\bar{\psi}_i^f \psi_i^f + \bar{\chi}_i^f \chi_i^f)$ を両辺に掛けてから Grassmann 数の積分を実行すると，(8) 式の右辺は

$$\int_{\mathbb{C}^{N_F \times N_F}} dZ dZ^\dagger \frac{\det\left((Z+m)(Z^\dagger+m)\right)^{N_C}}{\det(I+ZZ^\dagger)^{2N_F+N_C}}$$

となる．ここで先に $N_C \to \infty$ の極限をとると，この積分は被積分関数の停留条件

$$\frac{1}{Z+m} - Z^\dagger \frac{1}{I+ZZ^\dagger} = \frac{1}{Z^\dagger+m} - \frac{1}{I+ZZ^\dagger} Z = 0$$

を満たす**非零の鞍点** $Z^{ff'} = Z^{\dagger ff'} = m^{-1}\delta^{ff'}$ に支配される．このとき，(8) 式右辺の指数部分は $\bar{\psi}_i^f \psi_i^f + \bar{\chi}_i^f \chi_i^f$ に比例し，群 H のうち $(\{\bar{\psi}, \bar{\chi}\}, \{\chi, \psi\})$ を連動して回転させる対角 $U(N_F)$ 部分群の下でのみ不変である．つまり，$\lim_{m\to 0} \lim_{N_C\to\infty}$ の順番で極限をとるとき，香り対称性はランダムに分布する大ランクのユニタリー行列 U の影響により $U(N_F) \times U(N_F) \to U(N_F)$ と自発的に破れるのである*5)．(8) 式両辺の行列のランクが任意にとれることを利用して，熱力学極限での物理量を表す大サイズ（色）の行列積分を小サイズ（香り）のそれに等価に置き換えるという行列値積分のトリックがここで活用されている．行列の固有値を探るプローブとして特性多項式 $\Delta(\theta)$ などを挿入して初めて自発的対称性の破れが顕在化するという意味で，ランダム行列は対称性の破れを隠して内在している．

色・香り変換はすべての Cartan クラスについて存在するから，10 種類のランダム行列集団は各々に固有な形の対称性の破れを起こす．上の例は表 2 の 1 行目，クラス A のランダム行列集団（色行列積分）の場合であるが，他の例として色と香りを読み替えて 6 行目のクラス AIII のランダム行列集団を考えよう．期待値を求めるべき特性多項式は

$$\Delta(\theta) \equiv \det\left(e^{i\frac{\theta}{2}} I - e^{-i\frac{\theta}{2}} U\right) = \det(I+iH)^{-1} \times \int d\Psi d\bar{\Psi} \exp \bar{\Psi}\left[e^{i\frac{\theta}{2}}(I+iH) - e^{-i\frac{\theta}{2}}(I-iH)\right]\Psi$$

（U は (7),(6) の形）となり本質的に (8) 式の右辺（に $N_C \leftrightarrow N_F$ の交換をしたもの）である．従って $\Delta(\theta)^{N_F}$ の期待値は，(8) 式の左辺に置き換え

*5)　南部–Jona-Lasinio 模型（2008 年 Nobel 物理学賞）は，この機構をハドロンの質量生成機構（微小な「カレント質量」m に「カイラル凝縮」$\langle Z \rangle$ が加わり，実効的に大きな「構成子質量」$\langle Z \rangle + m$ として観測される）として提示した．

てから $\Psi = (\psi, \chi)$ の Grassmann 積分を実行した

$$\int_{U(N_F)} du\, \det\left(\cos\theta + i\sin\theta\cdot\frac{u+u^\dagger}{2}\right)^{N_C}$$

という香り行列 $U(N_F)$ の積分と等価になる．単位円周 $\theta \in [0, 2\pi)$ 上に U の N_C 個の固有値が分布していることより，固有値変数を $\theta = \epsilon/\frac{N_C}{2\pi}$ とアンフォールド（スペクトルの鏡像点 $\theta = 0$ の周りを拡大）してから色行列 U のサイズが $N_C \to \infty$ となる熱力学極限をとれば，上式の被積分関数は

$$\int_{U(N_F)} du\, \exp\left(i\pi\epsilon\,\mathrm{tr}\,(u+u^\dagger)\right) \qquad (11)$$

に収束する．このような香り行列変数の極限分布を（0 次元非線形）σ 模型と呼ぶ．これは有限次元積分であるから，行列変数を適切に座標付けすることにより計算でき（例えば $N_F = 1$ のときは Bessel 関数 $J_0(2\pi\epsilon)$），それから熱力学極限における固有値の相関関数が得られる*6)．この例のように，σ 模型の積分域が色行列積分に内在する連続的対称性を自発的に破れた部分群で除した剰余空間になっていること（南部–Goldstone（N–G）の定理）は，表 2 の各クラスについて確認できる．普遍性の根源は，固有値を測るプローブが入った行列積分が示す対称性の破れのパターンが Lie 群の表現論から表 1–表 2 に従って，クラスごとにアプリオリに決まっていることにあったのだ．この意味では色行列積分（ランダム行列集団）すら本質的ではなく，表 1 の対合的対称性の分類に対応した表 2 の香り行列積分（σ 模型）こそが準位統計の本質であると言える．

■ 7. 周期軌道/σ 模型対応 ■

σ 模型が準位統計の本質であるならば，等価性仮説などに頼らずに，σ 模型をカオス系の周期軌道論から直接，導出できるはずだ．ここでは時間反転対称性などを持たないクラス A の 2 自由度系について $Z(\epsilon, \epsilon')$ を評価しよう[8]．その非対角項に寄

*6) 固有値分布を求めるときは，2 つの特性多項式の積ではなく商の期待値 $\lim_{\theta'\to\theta}\partial_\theta\left\langle \Delta(\theta)/\Delta(\theta')\right\rangle$ を考えるので，(11) 式の積分域は $U(2)$ ではなく graded 群 $\hat{GL}(1|1)$ になる．

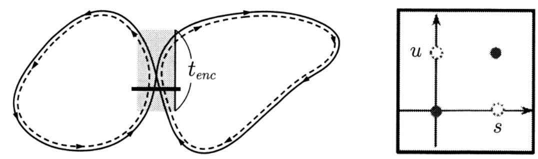


図 5 準周期軌道の組（左）と Poincaré 断面（右）．

与する最も簡単な準周期軌道の組は，$A = \{a\}$（∞ 型の実線）および $B = \{b_1, b_2\}$（2 つの O 型の点線）が網掛けの領域において邂逅する構造である（図 5）．周期軌道 a が載る 3 次元のエネルギー殻 $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = E$ を邂逅領域（時間幅 t_{enc}）のどこかで軌道に垂直に切った 2 次元の Poincaré 断面を右図に描いた．全域で双曲的なカオス系では断面は 1 つの安定方向（s 軸）と 1 つの不安定方向（u 軸）を持つが，左図のように軌道が時間発展するためには，各々の軌道はちょうど $s \times u$ の長方形状に断面を貫かなければならない．このとき準周期軌道の作用の差が $\Delta S = su$ であることを示せる．従ってこの軌道の組の寄与は，$F_a \simeq F_{b_1}F_{b_2}$ と近似すれば

$$(-1)^3|F_a|^2 e^{\frac{i}{\hbar\bar\rho}(\epsilon-\epsilon')T_a} e^{\frac{i}{\hbar}su} \qquad (12)$$

となる．また，周期 T_a の軌道 a の断面中に $(s, u) \sim (s+ds, u+du)$ だけ隔たった 2 点が存在する確率密度は，カオス系の軌道が体積 Ω のエネルギー殻内を一様に這い回ること（エルゴード性）を用いれば

$$\frac{ds\,du\,T_a\int_{t_{enc}}^{T_a-t_{enc}} dt}{\Omega\,t_{enc}} \qquad (13)$$

である．従って図 5 の構造の寄与は，(12)×(13) を周期軌道および断面の長方形の形状について総和した

$$-\sum_{a\in\text{周期軌道}}|F_a|^2\frac{T_a}{T_H}\underbrace{\iint\frac{ds\,du}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}su}}_{=1}e^{i2\pi(\epsilon-\epsilon')\frac{T_a}{T_H}}\int\frac{dt}{t_{enc}}$$

で与えられる．ここで状態密度に対する古典式 $2\pi\hbar\bar\rho = \Omega/2\pi\hbar \equiv T_H$ を用いた．さらに，エルゴード性から従う Hannay–Ozorio de Almeida の和則 $\sum_a|F_a|^2f(T_a) \simeq \int_0^\infty dT/T f(T)$ を用いた上で時間の積分変数を (t, T) から左右のリンク部分の所要時間に変更すると，各々の積分はリンク

因子 $1/(-ix)$ を与える．ここで $x \equiv 2\pi(\epsilon - \epsilon')$ と略記した．最後に残る指数関数を展開したうち $\hbar \to 0$ で生き残る項は分母の t_{enc} と同数（この場合は 1 個）の邂逅因子 ix となる．以上は任意の軌道構造に対して一般化でき，各々の構造の寄与は，

$$(\text{対称性因子}) \times (-1)^{\#\text{軌道}} \frac{(ix)^{\#\text{邂逅}}}{(-ix)^{\#\text{リンク}}} \tag{14}$$

となることが証明される．

一方，クラス AIII での (11) 式に対応した，クラス A のランダム行列の $Z(\epsilon, \epsilon')$ を与える σ 模型は，表 2 及び式 (8) を用いると対称空間 $U(2)/U(1) \times U(1) \simeq S^2$ 上の積分

$$Z(\epsilon_+, \epsilon'_-) = \int_{\mathbb{C}} d\mu(z) \exp\left(i\pi \operatorname{tr} \varepsilon T^{-1} \sigma_3 T\right),$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \epsilon'_- & 0 \\ 0 & \epsilon_+ \end{pmatrix}, \quad T = I + i \begin{pmatrix} 0 & z^* \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる[4]．この積分は初等的に行えて

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{dz\, dz^*}{2\pi(1+zz^*)^2} \exp\left(-\frac{ix}{2} \frac{1-zz^*}{1+zz^*}\right) = \frac{\sin(x/2)}{x/2}$$

と，いわゆる正弦核（サインカーネル）になる．いま，あえて $x \gg 1$ を仮定して積分変数 T を単位行列 I（S^2 の南極）の周りに摂動展開してみると，上式の指数部は

$$-\frac{ix}{2} \frac{1 - zz^*}{1 + zz^*}$$
$$= -\frac{ix}{2} + ixzz^* - ix(zz^*)^2 + ix(zz^*)^3 - \cdots$$

となる．これから読み取れる Feynman 規則（図 6．頂点に入る矢印は z，出る矢印は z^* を表す）は周期軌道論から導かれる (14) と本質的に同一ではないか！ このため，例えば図 3 のグラフの寄与

$$(\text{対称性因子}) \times \frac{(-ix)^1 (ix)^2}{(-ix)^8}$$

は，対応する図 2 の周期軌道の構造の寄与と係数を含めて一致する．また，積分の WKB 近似値（0+1 次摂動）$e^{-ix/2} i/x$ が周期軌道の対角和と一致することも確認できる．これらの摂動的寄与を総和し*7)，さらに摂動では見えない不安定な鞍点である無限遠点（この例では S^2 の北極）近傍の寄与を対称空間への Weyl 群の作用（周期軌道論の言葉では Riemann-Siegel 的再和公式）によって取り入れることにより，正弦核などの厳密値が再現される．まとめとして，周期軌道論と非線形 σ 模型の等価性を標語化した

カオス系における古典粒子の周期運動	=	行列値 **N–G** 粒子の量子論的な生成消滅

を掲げて本稿を閉じることとしよう[15]．

*7) クラス A の σ 模型は symplectic 多様体の高さ関数の積分である特殊性のため，実は各次数で摂動項の和は 0 になる．



図 6　非線形 σ 模型の Feynman 規則．

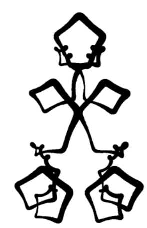
参考文献

1) A. Einstein, *Verh. Deut. Phys. Ges.* **19** (1917) 82.
2) 本稿で述べた事項の詳細な説明に加えてカオス的物理系の例を多く含む入門書としては，中村勝弘，『カオスと量子物理学』（サイエンス社，1997）．
3) F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 140; 157; 166.
4) F. Wegner, *Z. Phys.* **49** (1983) 297.
5) K.B. Efetov, *Adv. Phys.* **32** (1983) 53.
6) M.C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 33.
7) 周期軌道論への導入は，数理科学：跡公式（サイエンス社，1999 年 3 月号）；別冊数理科学：量子カオスの物理と数理（サイエンス社，2000 年）を参照．
8) S. Heusler, S. Müller, A. Altland, P. Braun, and F. Haake, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 044103; *New J. Phys.* **11** (2009) 103025.
9) O. Bohigas, M.J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 1.
10) 以下の説明の流れは S. Gnutzmann and B. Seif, *Phys. Rev. E* **69** (2004) 056219 に沿う．
11) F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 1199.
12) M.R. Zirnbauer, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 4986; arXiv: 10010772 [math-ph] (2010).
13) ランダム行列の広範な数理への応用は，数理科学：ランダム行列の広がり（サイエンス社，2007 年 2 月号）．
14) M.R. Zirnbauer, *J. Phys. A* **29** (1996) 7113.
15) 等価性は現時点（2010 年春）で 3 つの Dyson クラスについて証明されており，筆者は現在，残り 7 つの post-Dyson クラスへの証明の拡張を試みている．
16) http://www.dhushara.com/DarkHeart/QStad/QStad.pdf

（にしがき・しんすけ，島根大学総合理工学部）

素粒子論と行列

小林–益川行列から大統一理論まで



前川　展祐

1. 素粒子論

「素粒子論って何？」自分が何をやっているか，素人に説明を求められる機会がたまにある．多くの場合，詳しく説明する時間もないので，「最も小さいところで成り立つ基本的な法則を発見するための学問だよ.」と答えている．確かにこの答えは間違ってはいないが，これでは，全く，その魅力は伝わらないだろうなあ，といつも思う．いい機会なので，もう少し，説明したい．素粒子論が目指しているものは，例えば，化学における周期律表，生物におけるDNA，コンピュータにおける機械語というように，この世（物質）における最も基本的な法則，概念，原理を見つけ出すことにある．皆さんは，高校時代に多分，この世のすべての物は，たかだか，百数十種類の原子からできている，ということを学んだことと思う．ということは，その百数十種類の原子の性質とその理由がわかれば，物質の成り立ちの根源は，理解できる，と思ったことはないだろうか．化学で知られている原子の性質を第一原理から理解するには，原子がさらに原子核と電子とでできている，ということと，量子力学というミクロの世界を扱うときに重要になる法則を発見する必要があった．プラスの電荷を持った原子核とその周りに存在している電子との間に働く力は，電磁気力であるが，それを量子力学的に扱うことで，化学で知られている物質のすべての性質を原理的には再現でき得る（正確に言えば，矛盾する現象は知られていない），というのは，驚くべきことである．一方で，微視的な世界で威力を発揮する量子力学では，「現在の状態を如何に正確に定めても，未来は確率でしか予言できない」，という，量子力学以前の物理法則では考えられないような法則が基本原理として存在していることにも驚きを禁じ得ない．素粒子論という学問は，最も微視的な世界での法則を発見することを通じて，この世の成り立ちを統一的に理解することを目的としているが，一方で，これまでの常識を覆すような，しかも空想ではない現実の世の基本原理を発見することをも目標に置いている学問と言うことができる．

2. 標準模型

現在，自然界に知られている4つの力，重力，強い力，弱い力，電磁力のうちの重力を除く3つの力については，すべての実験結果と矛盾しない量子力学的な基本理論がわかっている．標準模型と呼ばれていて，重力以外のほとんどすべての物理現象を原理的には，この理論を出発点にして，理解できる，と思われている．おおざっぱに言えば，フェルミオン（スピン1/2）である物質（クォークとレプトン）と力を媒介するスピン1のゲージ粒子（グルーオン，W，Zボソンと光子），それらの粒子に質量を与えるスピン0のヒッグス粒子から構成されている（表1参照）．この模型では，様々な

表 1 素粒子の表．表中のクォークとレプトンは，3 世代中の 1 世代分であり，質量は違うが力の働き方は同じ粒子が 3 セット存在している．

素粒子名	スピン	素粒子とその変換性
クォーク	1/2	$q(3,2)_{\frac{1}{6}}$, $u^c_R(\bar{3},1)_{-\frac{2}{3}}$, $d^c_R(\bar{3},1)_{\frac{1}{3}}$
レプトン	1/2	$l(1,2)_{-\frac{1}{2}}$, $e^c_R(1,1)_1$
ヒッグス	0	$h(1,2)_{\frac{1}{2}}$
ゲージ粒子	1	$G(8,1)_0$, $W(1,3)_0$, $B(1,1)_0$

行列が活躍する．まず，力は，ゲージ力と呼ばれていて，強い力は，$SU(3)$ 変換（特殊ユニタリー行列で変換する）で表され，弱い力と電磁力は，$SU(2)$ と $U(1)$ 変換で表される．また，クォーク，レプトンはそれぞれ 3 世代存在するので，それらの粒子の質量は 3×3 行列になる．以下，それぞれの場合について説明しよう．

2.1 ゲージ力と行列

この特集は，行列の特集ということで，行列の種類については，それほど説明する必要はないのかもしれないが，一応，簡単に復習しておくと，ユニタリー変換 $U(N)$ とは，N 次元複素ベクトル u の長さ $\sqrt{u^\dagger u}$ を不変にする線形変換 $u' = U_N u$ のことであり，U_N を $N\times N$ のユニタリー行列と呼ぶ．従って，U_N は，$N\times N$ 複素行列でかつ $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ を満たす．また，$u=(u_1,u_2,\cdots,u_N)^t$ のことを，N 次元複素ベクトル表現 $\boldsymbol{N}$ と呼ぶ．また，複素共役ベクトル $u^\dagger$ は，$u^{\dagger'} = u^\dagger U_N^\dagger$ と変換するので，N 次元複素ベクトル表現 $\overline{\boldsymbol{N}}$ と呼ぶ．$\boldsymbol{N}$ 表現 u と $\overline{\boldsymbol{N}}$ 表現 $v^\dagger$ を掛け合わせたもの $v^\dagger u$ は，$U(N)$ 不変となる．特殊ユニタリー変換 $SU(N)$ とは，さらに，$\det U_N = 1$ を満たす行列で変換するユニタリー変換のことである．その場合，N 個の N 次元複素ベクトル表現 $u^i_I(i=1,2,\cdots N)$ から完全反対称にテンソル積 $\epsilon_{i_1 i_2\cdots i_N} u^{i_1}\otimes\cdots\otimes u^{i_N}$ を作るとそのテンソル積は，$SU(N)$ 変換で不変になることがわかる（変換させて，$\det U_N = 1$ を用いよ）．ここで，$\epsilon^{ijk\cdots}$ は，例えば 2 次元の場合，$\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$ かつ，他の成分は 0 となるようなものである．すると，$N-1$ 個の N 次元複素ベクトル表現を完全反対称にテンソル積を取ると，もう一つの N 次元複素ベクトル表現を掛けると $SU(N)$ 不変になることから，$\overline{\boldsymbol{N}}$ 表現になっていることがわかる．ちなみに，特殊ユニタリー変換は，自明なユニタリー行列（$N\times N$ 単位行列 1_N）と連続的に繋がっている．

ここでは，天下り的ではあるが，ゲージ力はユニタリー行列で表される，ということを認めてもらおう．強い力は，$SU(3)$，弱い力と電磁力は，$SU(2)$ と $U(1)$ である．これらのユニタリー変換で非自明に変換する粒子には，その力が働く，というわけである．では，具体的に，物質であるクォークとレプトンにどのような力が働いているか見ていこう．

強い力 $SU(3)$ ユニタリー変換が作用する空間は，3 次元のベクトル空間 V_3 なので，強い力が働く粒子は 3 成分（a=1,2,3）の足がある．それを $SU(3)$ の 3 次元表現と呼ぶ．表にあるようにすべてのクォークは，3 次元表現なので，強い力が働くことがわかる．ちなみに，$\bar{3}$ は，上で述べたように u を V_3 の元とするとその複素共役ベクトル $u^\dagger$ に対応するものである．一方，レプトンは，$SU(3)$ ユニタリー変換の元で変換しない（シングレット：1 表現）ので，強い力は働かない．

弱い力にいく前に言っておかないといけないことは，質量を持つクォークやレプトンは，2 種類の粒子があることである．それぞれ，右巻き（R），左巻き（L），と呼ばれている．例えば，皆さんご存じの電子にも，左巻き電子と右巻き電子があり，それぞれ働く力の種類さえも異なっている．弱い力は $SU(2)$ ユニタリー変換で表されるのであるが，作用する空間の 2 次元ベクトル空間の元になっているのは，表 1 にあるように左巻きクォーク $q=(u_L,d_L)$ と左巻きレプトン $l=(\nu_L,e_L)$ のみである．ちなみに，標準模型において，唯一の未発見粒子であるヒッグスも弱い力が働いている．

まとめると，強い力は，クォークのみに働き，弱い力は，左巻きクォークと左巻きレプトン，さらにヒッグス粒子にのみ働くということである．

2.2 クォークレプトン質量行列と小林–益川行列

天下り的ではあるが，標準模型において，クォークやレプトンの質量は，左巻きと右巻きが対になって初めて記述できる．クォークを例に，より正確に言えば，左巻きクォーク q と右巻きクォーク u_R^c とヒッグス場 h とで，すべてのゲージ力に対応するユニタリー変換で不変な形で，湯川相互作用と呼ばれる相互作用を書くことができる．つまり，

$$Y^u q(3,2)_{\frac{1}{6}} u_R^c(\bar{3},2)_{-\frac{2}{3}} h(1,2)_{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

という湯川相互作用は，強い力 $SU(3)$ 変換では，左巻きが 3，右巻きが $\bar{3}$ で $SU(3)$ 不変になっているし，弱い力 $SU(2)$ に対しても，2 つの 2 表現を反対称に組めば，やはり $SU(2)$ 不変になる．$U(1)$ 変換に対してもちょうど左巻きクォークの電荷と右巻きクォークの電荷とヒッグスの電荷をすべて足すと 0 になることが確かめられる．ここで，Y^u は，結合の大きさを表すパラメータで，湯川結合定数と呼ばれている．ヒッグス場が真空期待値 $\langle h \rangle$ を持つことで，この湯川相互作用が，アップクォークの質量項になり，その質量 M^u は，$M^u = Y^u \langle h \rangle$ と書ける．添え字の u は，この湯川結合定数がアップクォーク u の質量になることを表現したものである．同じようにダウンクォークの質量を生成する湯川相互作用は，$Y^d q d_R^c h^\dagger$，電子は，$Y^e l e_R^c h^\dagger$ と書くことができる．ニュートリノ質量は，他の場と異なり，4 つの場を含む相互作用 $Y^\nu llhh$ から，$M_\nu = Y^\nu \langle h \rangle \langle h \rangle$ となる．この違いにより，ニュートリノだけが極端に小さい質量を持つことが自然に理解できることが知られている．

さて，小林–益川は，CP 対称性を破るためには，クォークが 3 世代必要であることを指摘したわけだが，3 世代あると，この湯川相互作用が，$Y_{ij}^u q_i u_{Rj}^c h \quad (i,j = 1,2,3)$ となり，湯川結合定数が 3×3 の複素行列 Y_{ij}^u になる．湯川行列の足の意味を少し説明すると，左側の足は，左巻きクォーク q_i に対応した足であり，右側の足は，右巻きアップクォーク u_{Rj}^c に対応した足となっており，意味が違うことを覚えておいてほしい．湯川結合定数×ヒッグスの真空期待値が質量になったので，アップクォークの質量は，3×3 の質量行列 $M_{ij}^u = Y_{ij}^u \langle h \rangle$ になる．ダウンクォークや電子も同様である．質量は，この 3×3 の質量行列の固有値であり，クォークの混合角である小林–益川行列やレプトンの混合行列である牧–中川–坂田行列は，おおざっぱに言えば，この質量行列を対角化する行列となっている．一般の複素行列 M は，2 つのユニタリー行列 U_L と U_R を用いて，対角成分だけに 0 でない成分を持つ対角行列 $\hat{M} = U_L M U_R^\dagger$ にすることができる．従って，アップクォークや，ダウンクォーク，電子の質量行列は，U_{Lx} と U_{Rx} $(x = u, d, e)$ を用いて対角化できる．その固有値が，クォーク，レプトンの質量であり，小林–益川行列は，正確に言えば，左巻きクォークを回転する行列 U_{Lu} と U_{Ld} を用いて，$V_{KM} \equiv U_{Lu}^\dagger U_{Ld}$ で定義される行列である．レプトンセクターでの小林–益川行列に対応するものが，牧–中川–坂田行列と呼ばれる行列であり，やはり，同様に，$V_{MNS} \equiv U_{L\nu}^\dagger U_{Le}$ で定義される行列である（ニュートリノの質量行列は，$Y_{ij}^\nu l_i l_j hh$ という相互作用から得られることからわかるように，両足とも左巻きニュートリノである．3×3 の複素対称行列 $M_{ij}^\nu = Y^\nu \langle h \rangle \langle h \rangle$ は，$U_{L\nu}$ を用いて $\hat{M}^\nu = U_{L\nu} M^\nu U_{L\nu}^\dagger$ と対角化できる）．

次のサブセクションでは，これらのパラメータの測定されている値を見て，その傾向を見る．

2.3 標準模型のパラメータ

ゲージ力の部分は，3 つのユニタリー変換 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ に対応して，それぞれ一つずつゲージ結合定数 $g_i (i = 1,2,3)$ がパラメータとして存在する．測定値は，$\alpha_i \equiv \frac{g_i^2}{4\pi}$ で書くと，大体，$\alpha_1^{-1} \sim 98$, $\alpha_2^{-1} = 30$, $\alpha_3^{-1} = 8.5$ となり，おおざっぱに言って，$g_3 > g_2 > g_1$ という不等式が成り立つ．

一方，湯川結合の部分は，多くのパラメータが存在する．6 種類のクォークと 6 種類のレプトンの質量が 12，小林–益川行列と牧–中川–坂田行列のパラメータは少し議論が必要であるが，それぞれ，4 つと 6 つ．全部で 22 個のパラメータが存在

表2 クォーク，レプトンの質量．ニュートリノは，他のクォーク，レプトンと同様に階層的な質量を持っていることを仮定した．

	(m_1, m_2, m_3)
(m_u, m_c, m_t)	(2 MeV, 1.3 GeV, 171GeV)
(m_d, m_s, m_b)	(5 MeV, 100 MeV, 4.2 GeV)
(m_e, m_μ, m_τ)	(0.5 MeV, 106 MeV, 1.8 GeV)
$(m_{\nu 1}, m_{\nu 2}, m_{\nu 3})$	(<0.009 eV, 0.009 eV, 0.05 eV)

表3 小林–益川行列と牧–中川–坂田行列．

$$V_{KM} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^4 \\ \lambda & 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda \sim 0.22)$$

$$V_{MNK} \sim \begin{pmatrix} 0.9 & 0.5 & < 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.6 & 0.7 \end{pmatrix}$$

している．小林–益川行列は，3×3 のユニタリー行列なので，9つパラメータがあるはずであるが，3つのアップクォークと3つのダウンクォークの場の位相の自由度を使うことで，$9-5=4$ つのパラメータになる（すべての位相を同じだけ回す自由度は，小林–益川行列を変えないので，6つではなく，5つのパラメータを減じる効果になっている）．3次元空間の回転パラメータの数は3なので，残り1つがCP位相となる．2世代で同じ計算をすると，$4-3=1$ となり，2次元空間の回転パラメータの数1と等しくなり，CP位相がないためCP対称性を破ることができない．これが，小林–益川理論の肝である．一方で，牧–中川–坂田行列は，3つの電子の場の位相は使えるが，ニュートリノの位相は，使えないため，$9-3=6$ つのパラメータが残ることになる．現在，測定されているパラメータは，表2, 3にあるが，おおざっぱに言って，世代が上がるごとに大きな質量を持っている．クォーク，レプトンの種類によって，階層性に違いがある．アップクォークの階層性は，トップクォーク（171 GeV）から，アップクォーク（2 MeV）まで，実に 10^{-5} と最も強い階層性があり，ダウンクォークや，電子は，10^{-3} 程度で中間の階層性，ニュートリノは，第一世代はよくわからないが，2–3世代の質量階層性で考える限り，一番弱い階層性を持っていることが見て取れる．一方，小林–益川行列の非対角成分は，牧–中川–坂田行列の非対角成分に比べてとても小さくなっていることもわかるだろう．

これら25個ほどのパラメータを適切に選択することで，重力以外のすべての現象を矛盾なく理解できることは驚くべきことである．

2.4 標準模型の謎

クォークやレプトンの $U(1)$ 電荷がなぜ，そのような値になっているのか，ということは，標準模型ではよくわからない．また，ゲージ結合定数の値や，クォーク，レプトンの質量や混合角の様々な階層性は，標準模型では，実験に合うようにパラメータを手で決めているに過ぎず，なぜ，そのような値や階層性になっているのか，ということについては，何一つ答えることができない．

これらの標準模型における謎を答えることができる有力な理論が，大統一理論である．以下では，それを説明しようと思う．

3. 大統一理論と行列

大統一理論というのは，標準模型における3つの力に対応するユニタリー変換 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ を一つの力に統一する（対応するユニタリー変換は $SU(5)$）だけでなく，クォーク，レプトンも統合する．その結果，クォーク，レプトンの $U(1)$ 電荷の起源が理解できるだけでなく，ゲージ結合定数の大きさの違いを定量的に理解することができるし，さらに，クォーク，レプトンの質量や混合角の様々な階層性の違いをも定性的に理解できる．以下では，これらのことを行列を用いて説明しようと思う．

3.1 力の統一

力がユニタリー変換で記述できる，ということを認めると，3つの力を統一するには，3つのユニタリー変換を一つのユニタリー変換に統一することができることを示せばよい．結論を言うと，ユニタリー変換 $SU(5)$ に標準模型の3つの力に対応する3つのユニタリー変換 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

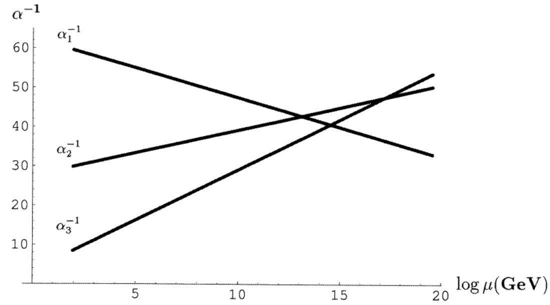


図 1　標準模型におけるゲージ結合定数のスケール依存性.

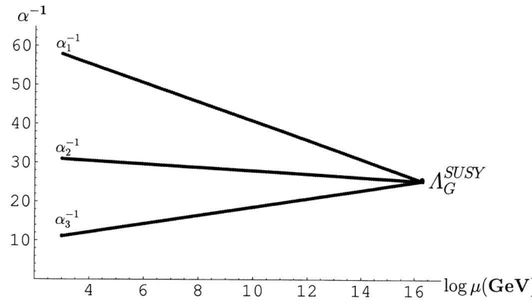


図 2　超対称性標準模型におけるゲージ結合定数のスケール依存性.

を埋め込むことができる．実際に 5×5 の特殊ユニタリー変換行列 U_5 の中には,

$$\begin{pmatrix} U_3 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_3 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{3}}1_3 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{1}{2}}1_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

と，独立なユニタリー行列で, U_3 と U_2 と U_1 に対応した $SU(5)$ ユニタリー行列がある．ここで, 1_n は, $n\times n$ の単位行列である．U_1 の行列の対角要素は, U_3, U_2 と独立という条件と, $\det U_5=1$ という条件で決まっている．標準模型における 3 つのゲージ結合定数は, $SU(5)$ のゲージ結合定数と同じになるため, $g_5 = g_3 = g_2 = g_1$ が成立する．これは，一見，実験値 $g_3 > g_2 > g_1$ と矛盾するように見えるが，実際は，ゲージ結合定数は，見ている物理のスケールに依存しており，その依存性を標準模型で計算すると，図 1 のように高いスケールで一致する傾向を示すので，高いスケールで，この統一が起こっていることを強く示唆していると思われている．詳しくは述べる余裕がないが，超対称性を導入した超対称性標準模型で，ゲージ結合定数のスケール依存性を計算すると，図 2 のようになり，かなりの精度で一致していることがわかる．この一致は，超対称性大統一理論における数少ない実験的なサポートと思われている．

3.2 物質の統一

以上のように単純な埋め込みで，力が統一されることがわかってきたわけであるが，物質に関しても次のような単純な埋め込みで統合されることがわかる．つまり，1 世代のクォーク，レプトンは，標準模型では，5 つの場, q, u_R^c, d_R^c, l, e_R^c で記述されているが, $SU(5)$ 大統一理論では, 5×5 の反対称テンソル A_{IJ}（10 次元表現）に q, u_R^c, e_R^c が, $\bar{5}$ ベクトル C^I に d_R^c, l が統合されることが示される（$I,J=1,\cdots,5$)．10 次元反対称テンソル A_{IJ} というのは, $SU(5)$ 変換で, $A \Rightarrow U_5^t A U_5$ と変換する 5×5 の反対称行列であり，従って, 10 個の自由度がある．まず, $SU(3)\times SU(2)$ について，確かに，上記のような統合に矛盾しないことを見てみよう．$SU(5)$ 変換の足 $I,J=1,\cdots,5$ のうち, $I,J=1,2,3$ が, $SU(3)$ 変換する足になる．それを, $a,b=1,2,3$ と書くことにする．$I,J=4,5$ が $SU(2)$ 変換する足になるので, $\alpha,\beta=1,2$ と書くことにしよう．5×5 の反対称テンソル A_{IJ} は, A_{ab}, $A_{a\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$ と分類できる．$A_{a\alpha}$ は, $SU(3)$ の足と $SU(2)$ の足を一つずつ持っているので，ちょうど, $SU(3)$ と $SU(2)$ に関しては, q と同じ変換性を示す．また, $SU(3)$ の足 2 つを反対称に組むと, $\bar{3}$ 表現になるので, A_{ab} は, U_R^c や D_R^c と同じ変換性になり, $SU(2)$ の足を反対称に組むと, $SU(2)$ シングレットとなるので, $A_{\alpha\beta}$ は, e_R^c と同じ変換性になる．一方, $SU(5)$ の $\bar{5}$ 表現場 C^I は, $C' = CU_5^\dagger$ と変換するので, $I=1,2,3$ の場が, d_R^c や u_R^c と同じになり, $I=4,5$ は, l と同じになることがわかる．$U(1)$ の変換性も, $SU(5)$ に $U(1)$ が上記のように埋め込まれていることを認めると，実際に計算できて, A_{ab} は, $-1/3+(-1/3)=-2/3$ となり, u_R^c になることがわかる．$A_{\alpha\beta}$ は, $1/2+1/2=1$ となり, e_R^c となる．また, $A_{a\alpha}$ は, $-1/3+1/2=1/6$ となり,

q の $U(1)$ 電荷と同じになることがわかる．一方，C^a は，$+1/3$ となり，d_R^c になるし，C^α も，$-1/2$ となり，l と同じになっていることがわかる．以上により，標準模型の5つの場が，$SU(5)$ の反対称テンソル場 A_{IJ} と $\bar{5}$ 表現場 C^I の2つの場に統合されていることがわかった．

さて，この統合により，質量行列はどうなるであろうか．結果から言えば，細かいことを気にしなければ，この統合により，観測されている質量や混合角の階層性の違いを自然に説明できることがわかる．そのことを説明したい．質量行列を書くためには，湯川相互作用を書き下さないといけないので，ヒッグス場も $SU(5)$ の表現として書く必要がある．標準模型のヒッグス場は，5 表現場 H_I において，$I=4,5$ 成分である，H_α と書くことができる．すると，クォーク，レプトンの質量行列を与える相互作用は，次のように書ける．

$$Y^u_{ij}\epsilon^{IJKLM}A_{IJi}A_{KLj}H_M + Y^d_{ij}A_{IJi}C^I_jH^{\dagger J} + Y^{\nu_D}_{ij}C^I_iC^J_jH_IH_J.$$

A_{IJ} には，q と u^c_R と e^c_R が，C^I には，d^c_R と l が統合されていることを考えると，1番目の相互作用は，アップの湯川相互作用に，2番目は，ダウンと電子の湯川相互作用に，3番目は，ニュートリノの相互作用に対応していることがわかる．それぞれの湯川結合に添え字を書いたが，2番目の相互作用に関しては，湯川行列の左側の足が左巻きのクォーク，レプトンである，というルールに従えば，$Y^d=(Y^e)^t$ と電子の行列に関しては，反対の足になっていることがわかる．

さて，この相互作用の統合のされ方を見ると，実は，前セクションで見た質量の階層性における程度の違いの分類と同じであることに気づかされる．つまり，アップクォークが最も強い質量階層性をもち，ニュートリノが最も弱い階層性，ダウンクォークと荷電レプトンがその中間の階層性という観察とちょうど対応している．さらに，階層性がより強い相互作用には，より多くの A_{IJ} が関与していることもすぐにわかると思う（つまり，アップクォークの質量を与える湯川相互作用には，A_{IJ} は，2つ含まれているのに対し，ダウンクォークや荷電レプトンは，1つであり，ニュートリノに関しては，1つも含まれていない）．従って，

$$A_i \text{ は } C_i \text{ より強い質量階層性をもたらす}. \quad (3)$$

という仮定をすれば，標準模型における質量の階層性の違いを説明することができる．この仮定のさらに重要なことは，クォークの混合角がレプトンの混合角よりも小さいことも同時に説明できてしまうことである．ここでは，行列の固有値と対角化行列の混合角との間の関係として，「階層性が大きい固有値を持つ行列の対角化行列は，小さい混合角を持つ傾向が強い.」ということを認めてもらおう（後で詳しく説明する）．すると，A^i を回す対角化行列は，C^i を回す対角化行列に比べて，小さい混合角を持つ，ということになる．一方で，小林–益川行列を定義するときに重要な左巻きクォーク q は，A^i に統合され，牧–中川–坂田行列を導出する際に重要な左巻きレプトン l は，C^i に統合されているので，上記の傾向を認めると，小林–益川行列のほうが牧–中川–坂田行列よりも小さい混合角を持つ，ということが結論される．この結論は，実験で得られた定性的な傾向を説明している．

さて，行列において，「階層性が大きい固有値を持つ行列の対角化行列は，小さい混合角を持つ傾向が強い.」ということを説明しよう．ここでは，簡単のため，次のような 2×2 行列 $\begin{pmatrix}1 & \epsilon\\ \epsilon & \epsilon^2\end{pmatrix}(\epsilon << 1)$ を考える．この説明文では，簡単のため，行列の要素は，オーダーを示しているに過ぎず，本当は，$O(1)$ 係数があるが，無視して書くことにしたい．すると，この行列の2つの固有値のオーダーは，$(1,\epsilon^2)$ であり，対角化行列は，$\begin{pmatrix}1 & \epsilon\\ \epsilon & 1\end{pmatrix}$ となるであろう．固有値の階層性が強い（つまり，ϵ が小さい）ほど，混合角が小さくなることがわかる．もちろん，このような結論にならない行列を考えることは，容易であるから，これは，一般的な結果ではなく，単なる傾向に過ぎない．しかしながら，この結論が正しい場合も数多いことも事実である．

簡単のため，2 世代の大統一理論で上のことを具体的に見てみよう．そして，例えば，第一世代の A 場 A_1 が一つ現れるごとに係数が ϵ かかることを仮定してみよう．すると，上記の行列は，

$$Y^u \sim \begin{pmatrix} \epsilon^2 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad Y^d \sim (Y^e)^t \sim \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$Y^\nu \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける．まず，固有値は，$y_u \sim (\epsilon^2, 1)$，$y_d = m_e \sim (\epsilon, 1)$，$y_\nu \sim (1, 1)$ となり，標準模型で得られた質量パラメータの階層性の違いを再現している．これらの行列を対角化する行列は，

$$U_{Lu} \sim U_{Ld} \sim U_{Ru} \sim U_{Re} \sim \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$U_{Le} \sim U_{L\nu} \sim U_{Rd} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

となり，小林–益川行列 V_{KM} や，牧–中川–坂田行列 V_{MNS} は，

$$V_{KM} = V_{Lu}^\dagger V_{Ld} \sim \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix},$$
$$V_{MNS} = V_{L\nu}^\dagger V_{Le} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．やはり，小林–益川行列の混合角のほうが小さいという定性的な事実をよく再現している．

まとめると，大統一理論においては，「A_i は C_i より強い質量階層性をもたらす.」という仮定をするだけで，標準模型におけるクォーク，レプトンの質量階層性の違いを説明できるだけではなく，クォーク，レプトンの混合角の違いまで，定性的に説明できる．

4. E_6 大統一理論

$SU(5)$ 大統一理論には，仮定 (3) を採用することで，クォーク，レプトンの質量階層性の違いを説明できるだけでなく，混合角の違いまで説明できる，という性質があるが，その仮定は $SU(5)$ の枠内では仮定せざるを得ない．ところが，E_6 変換という $SU(5)$ を部分群として含んでいる変換で力を統一すると，上記の仮定が自然の導出される．

世代の起源も標準模型における大きな謎の一つである．よく行われることは，世代も例えば 3 世代を $SU(3)$ 変換で統一する，ということであるが，統一すると，クォーク，レプトンの質量や混合角が現実的なものにするのは，一般的には難しい．ところが，E_6 大統一理論においては，$SU(5)$ における上記の仮定が自然に導出されるために，世代を $SU(3)$ 変換で統一し，かつ，現実的な質量行列を得ることができる．これだけでも十分魅力的であるが，それに加えて，超対称性理論における問題であるフレーバー問題が解決でき得る構造が入るのは，この方向が有望であることを感じさせてくれる．

以上の点については，スペースの関係で，ここでは詳細な説明はしないこととする．解説記事[1]を参照してほしい．

その後の進展を少し述べておくと，超対称性 CP 問題を解決するために，CP 対称性を自発的に破るというアイデアを世代対称性を持つ E_6 大統一理論に導入すると，標準模型における CP 対称性の破れを記述する小林–益川理論が導出され，かつ，超対称性 CP 問題を解決できる[2]．さらに，これまでの理論では，パラメータ間の相殺が必要であった，アップクォークの質量や，小林–益川行列の 13 成分（V_{ub}）の現実的な値が相殺なしに自然に得ることができるようになった．超対称性の破れの媒介シナリオにもよるが，中性子の電気双極子モーメントが実験バウンド近くに出得ることもわかってきたので，将来の実験が楽しみである．

5. まとめに代えて

ニュートリノ振動が SuperKamiokande によって 1998 年に初めて確認されたことを筆頭に，ニュートリノ物理に対する日本の素粒子実験の貢献は極めて大きいものがある．もし，ニュートリノ質量や混合角の測定値がなければ，$SU(5)$ 統一理論におけるクォーク，レプトンの統合により，クォーク，レプトンの質量や混合角がうまく説明

できる，というこの論説文の重要な主張の一つがほとんど説得力を持たなくなることに注意してほしい．KamiokandeやSuperKamiokandeのメインターゲットは，大統一理論の証拠として陽子崩壊を捉えることだった，と聞いている．残念ながら直接的な証拠である陽子崩壊を発見することはできなかったが，ニュートリノ振動を発見することで，大統一理論の間接証拠を見つけることはできた，と言うと言い過ぎだろうか．

小林–益川とBファクトリー，牧–中川–坂田とニュートリノ振動実験という現在の素粒子標準模型の重要な部分が日本の理論と実験双方の活躍により，提案，確認されてきたことは，同じ日本人として誇らしいことである．これからもそうありたいと強く祈念しつつ，筆を置くことにする．

参考文献

1) 前川展祐,「大統一理論と超対称性」,「数理科学」2004年12月号特集「素粒子物理学の未解決問題」(2007年10月別冊「素粒子物理学の発展」に再録).
2) M. Ishiduki, S.-G. Kim, N. Maekawa, K. Sakurai, "Spontaneous CP violation in E_6 SUSY GUT with $SU(2)$ flavor and anomalous $U(1)$ symmetries", *Phys. Rev.* **D80** (2009), 115011.

(まえかわ・のぶひろ，名古屋大学大学院理学研究科)

MATLABと行列

松田 卓也

数値解析ソフトは物理学を初め理工系の専門家，学生には必需と言ってもよいものであるが，本稿ではその一つであるMATLABと行列との結びつきを，例を交えて解説したい．

1. MATLABとは

MATLABとはコンピュータのプログラミング言語の一種であり，MATrix LABoratoryを省略したものである．マットラブとかマトラブ，マトラボと呼ぶ．直訳すれば行列実験室ということになる．通常のプログラミング言語であるCやFortranがスカラーを基本要素とするのに対して，行列を基本要素とする言語である．アメリカのMathWorks社が開発している数値解析ソフトであり，行列計算，ベクトル計算，可視化などに強い．豊富なライブラリを有していて，科学計算，技術計算のみにとどまらず，データ解析，統計計算など様々なアプリケーションが展開されている．MATLABのアドオンであるSimulink, Stateflowなどとともに技術開発の現場で多用されている．

MATLABはインタープリター型の言語であり，コンピュータ言語としてはCやFortranといった従来のコンパイラー型の言語よりはBasicに似ているが，Basicより，はるかに強力な言語である．インタープリター型であるのでプログラム開発が容易であり，プログラム開発の生産性が極めて高い．プログラミングを行いながら，1行追加するたびに，そこまで書いたコードを逐次実行させながら開発するといったことが可能である．科学技術計算に必要な時間は，計算時間そのものよりもむしろ，プログラム開発にかかる時間が圧倒的に長い．それがMATLABを使用することにより劇的に短縮される．

非常にたくさんの関数が定義されていて，例えば常微分方程式を解き，それをグラフ化するといった作業が，たった1行で記述できる．そのためプログラム行数がCやFortranで書いた場合の行数より，はるかに短くすることができる．具体的な例は後で示すが，ちょっとした微分方程式を解くといった問題は数十行程度のコードを書けば十分である．大学の卒業研究程度のレベルの計算であれば，MATLABの経験を積んでいれば，1時間もあれば完成してしまう．

インタープリター型言語であることに伴う計算速度の遅さは，どうしても必要であれば，ホットスポットの部分だけをFortranやCで書くといった手法で補うことができる．またCUDA言語を用いてGPGPUと接続することもできるので，それで計算速度の遅さをカバーすることもできる．

欠点も言っておけば，MathWorks社の製品であるため有料であることだ．ただし学生版は比較

的安価である．また変数が基本的には行列であるので，FortranやCのスカラー変数になれた頭（これを筆者は「スカラー頭」と呼ぶのだが）から「行列頭」に直さねばならない．例えば $C = A * B$ と書いたとき，A, B, C が行列である場合，かけ算の記号である $*$ は行列のかけ算を意味する．行列の各項のかけ算をしたい場合は .* つまりかけ算記号の前にピリオドを入れるという特殊な記号になることを理解しなければならない．MATLABを使い始めたときに一番混乱したのはこの部分である．しかしひとたび行列頭になってしまうと，MATLABを使ってのプログラム開発は極めて用意であり楽しい．ヘルプにはたくさんの例題が載せられているので，それを自分の必要に応じて改造していけばよい．

2. 食うか食われるかの方程式

色々と効能を述べるよりは，実例を示すのが手っ取り早い．ここではMATLABのヘルプに載っている例題を解説する．食うか食われるかの関係式，つまり肉食動物と草食動物の個体数の変化を記述するロトカ・ボルテラ方程式を考えてみよう．

y_1, y_2 をそれぞれ草食動物，肉食動物の個体数とする．これら変数の時間変化を記述する方程式は α, β を適当な定数として次の式で記述できる．

$$\frac{dy_1}{dt} = y_1 - \alpha y_1 y_2, \tag{2.1}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -y_2 + \beta y_1 y_2. \tag{2.2}$$

式 (2.1) の右辺第1項は，草食動物は肉食動物がいないとどんどん増えていくことを意味する．第2項は肉食動物に食われて個体数が減少することを意味する．式 (2.2) の右辺第1項は，肉食動物は草食動物というエサがないと死んでいくことを意味する．第2項は草食動物を食べることにより，肉食動物の個体数が増えることを意味する．

肉食動物が増える，つまり y_2 が大きくなると，草食動物をそれだけ食うことになる．そして (2.1) の右辺第2項が効いて y_1 が小さくなり草食動物が減る．草食動物が減るとエサが少なくなるので，こんどは肉食動物も減る．式で言えば (2.2) の右辺第2項が小さくなり y_2 が増えにくくなる．このように草食動物と肉食動物の間には，食うか食われるかの関係を通じてフィードバックが働いている．そのために個体数が一定ではなく，解が振動する現象が発生する．この方程式をMATLABで解いてみよう．

まず式 (2.1), (2.2) を記述する関数 `lotka(t,y)` を定義する．

```
function yp = lotka(t,y)
%LOTKA Lotka-Volterra predator-prey
% model.
global ALPHA BETA
yp = [y(1) - ALPHA*y(1)*y(2);
      -y(2) + BETA*y(1)*y(2)];
```

最初の行は関数の定義である．ここで `t` は時間，`y` はこの場合は2つの成分を持つ列ベクトルである．左辺の `yp` は式 (2.1), (2.2) の右辺を表す列ベクトルを意味する．`%` はコメントであるので，このプログラムはコメントを除けば，実質は3行であることに注意しよう．4行目は定数 α, β が大域的変数であることを意味する．5〜6行目が式 (2.1), (2.2) を1行で書いたものだ．`y(1)` はベクトルの第1成分を意味する．右辺はこの場合2行1列の列ベクトルになる．大括弧内のセミコロンは，ここで改行することを意味する．つまり右辺が列ベクトルであると言うことだ．式の最後のセミコロンは出力抑制を表す．セミコロンがないと，変数の値がそのたびごとに出力される．

この方程式を例えば時間 $0 < t < 25$ の間で解いてみる．定数は $\alpha = 0.01, \beta = 0.02$ とする．初期条件として $y_1 = 20, y_2 = 10$ とする．メインプログラムはスクリプトとして書くと次のようになる．

```
global ALPHA BETA
```

```
ALPHA = 0.02
BETA = 0.01
[t,y] = ode45(@lotka,[0,25],[20; 10]);
plot(t,y(:,1),'k',t,y(:,2),'k--')
```

第 1 行目は大域変数の宣言である．第 2 行目，3 行目はパラメターの値の定義である．4 行目の ode45 は微分方程式を 4 次 5 次ルンゲクッタ法で解く関数であり，MATLAB ですでに定義されている．右辺の最初の引数は式の右辺を定義する関数，2 番目の引数は解くべき時間間隔，3 番目の引数は初期値である．

4 次 5 次ルンゲクッタ法とは，4 次と 5 次のルンゲクッタ法で解いて，両者の解の差が許容範囲である場合はそのままの解を採用する．解の差が許容範囲を超えると時間刻みを自動的に短縮してくれるという手法だ．MATLAB にはいろんな種類の常微分方程式ソルバーがある．10 次 12 次ルンゲクッタ法なるものまで，ユーザーコミュニティーは提供している．

左辺が計算結果の入る出力引数である．ここでは t は時間ステップ数だけの要素を持つベクトルである．変数 y は時間ステップ数だけの要素を持つ列ベクトルである．右辺の引数が入力引数であり，左辺は出力引数と意味が明瞭である．Fortran77 などの場合，入力引数と出力引数の区別が明快ではない．5 行目は横軸を時間 t，縦軸を従属変数 y_1, y_2 としたグラフを描くことを意味する．最初の線は黒 (k) の実線，二番目の線は黒の破線で描く．コロンはすべての値を意味する．結局，主プログラムが 5 行，関数プログラムが実質 3 行に納まる．

3. 計算結果の可視化

計算結果の図は例えば図 1 のようになる．

横軸と縦軸にそれぞれ y_1, y_2 を取った位相図を描くには

```
plot(y(:,1),y(:,2),'k')
```

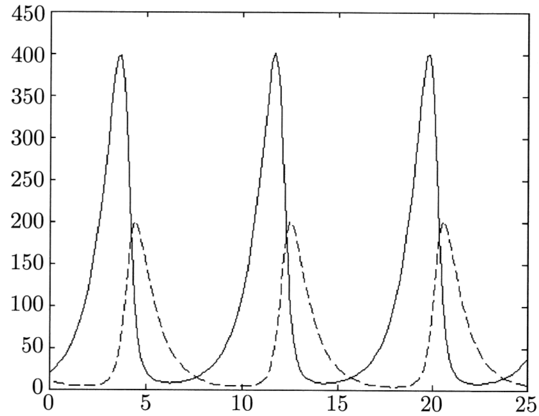


図 1　草食動物 y_1 と肉食動物 y_2 の個体数の時間変化．横軸は時間であり，縦軸は個体数である．実線は y_1，破線は y_2 を表す．

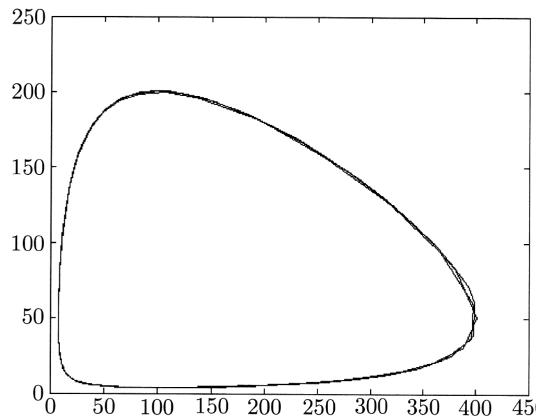


図 2　草食動物と肉食動物の個体数の位相図．横軸は y_1，縦軸は y_2 を表す．

とする．コロンはすべての要素という意味である．結果は図 2 のようになる．極めて簡単であることが分かるだろう．

ところで MATLAB の用意周到なところは，メインプログラムで関数からの出力を受けて，plot 関数で図示することをしなくても，単に

```
ode45(@lotka,[0,25],[20; 10])
```

とだけ書くと，デフォルトの図が自動的に出力される．plot(t,y) を明示的に書く必要すらないので，メインプログラムが 4 行になる．ただしこのやり方ではデフォルトの図しか出力されない．縦

軸，横軸に変数名を入れるとか，図をいろいろ細工したい場合は，明示的に plot 関数を使い，パラメターを指定する必要がある．

上記の例ではパラメター α, β がプログラム内で定義されている．いわゆるハードコーディングになっている．パラメターを外から与えるためには，メインプログラムをスクリプトではなく，次のように関数として定義すればよい．

```
function Lotka_Volterra(ALPHA,BETA)
```

こうするとメインプログラムも 3 行になり，関数サブプログラムと合わせても，実質 6 行に過ぎない．

4. Simulink

MATLAB の関連ソフトとして Simulink というものがある．これを使うとプログラミングが，あたかもレゴを組み合わせて複雑な模型を作るように，小さなブロックを画面上で組み上げてプログラムを作ることができる．このようなプログラム言語を可視化言語と呼ぶ．Simulink は可視化言語の代表的なものである．MATLAB の学生版には Simulink も付属している．Simulink は MATLAB を起動した上で，その上で動く言語である．

さて Simulink を用いて先の方程式を解いてみよう．まずロトカ・ボルテラの方程式を次のように書き換える．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\alpha y_2)\, y_1 \\ (-1+\beta y_1) y_2 \end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

ここで次のような演算を考える．

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha y_2 \\ -1+\beta y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad (4.2)$$

(4.1) の右辺は (4.2) の左辺と次の解ベクトル

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

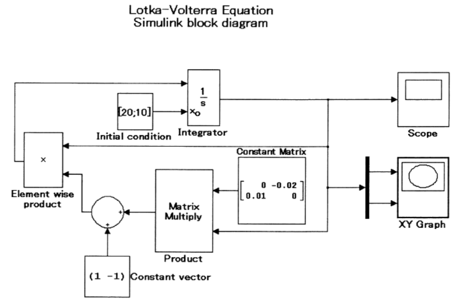


図 3

の要素ごとに積を取ったもので表される．MATLAB, Simulink ではこのような積の取り方が存在する．

さて図 3 が Simulink で作ったロトカ・ボルテラ方程式の解法に関するブロック図である．一見ややこしく見えるが，ブロックを一つずつ説明しよう．まず中央上の Integrator と書いてあるものは積分器であり，(4.1) の時間積分を実行する．ブロックには入力と出力があり，この積分器の場合左下の矢印から初期値ベクトルが入力される．左上の矢印からは (4.1) の右辺のベクトルが入力される．積分器の右に出る矢印は (4.3) の解ベクトルである．それは右端上の Scope というブロックに入るが，ここで基本的に図 1 と同じグラフが出力される．右端下の XY Graph というブロックでは，図 2 と同様なグラフが出力される．

積分器から出力されたベクトルは中央下の Matrix Multiply というブロックで，その右にある Constant Matrix というブロックに入っている行列と掛け合わされる．これは (4.2) 式の右辺第 1 項に対応している．その結果と一番下のブロックにあるコンスタントベクトルと，丸いブロックの中で加え合わされる．これは (4.2) 式の右辺を表している．それはさらに Elementwise product と書いたブロックで，解ベクトルと項毎に掛け合わされる．これで (4.1) の右辺が完成する．それは積分器の左上から積分器に入力される．こうしてブロック図における変数データの流れは完結する．

こうして方程式 (4.1) の解法がブロックとそれらを結ぶ矢印で表現されたことになる．

Simulink のようなプログラミング言語をデータ・フロー言語と呼ぶ．結線はデータの流れ，ブロックはデータの加工を表している．Simulink は工学的な応用，特に制御などによく使われている．Simulimk で書いたプログラムは，最終的には C 言語に変換されて，実時間制御のために機器に組み込まれる場合がある．ここでは Simulink を簡単に紹介したが, MATLAB, Simulink はとても奥の深い言語であり，また応用上重要な言語である．

5. 行列の可視化

MATLAB は基本要素が行列であると述べた．ここでは簡単な行列演算と，その可視化について述べよう．要素が 0 と 1 の間の値を取る乱数である，100×100 の行列を考える．その行列をつぎの MATLAB コマンドで図示する（図 4）．

```
a=rand(100);       % $100 \times 100$行の,
                   % 乱数を要素とする行列
imagesc(a);        % 値をスケールして図示する
colormap(gray);    % グレイのカラーマップを使う
axis square        % 図を正方形にする
```

この行列を次の MATLAB コマンドで逆行列を作り，それを可視化する（図 5）．

```
b=inv(a); imagesc(b); axis square;
```

さらに c=a*b とすると，c は単位行列になるはずである（図 6）．

```
c=a*b; imagesc(c); axis square;
```

確かに c は単位行列になっていることが，目で見て分かる．疎行列や L, U 行列を可視化すると理解しやすい．

6. おわりに

以上で MATLAB と Simulink の機能の簡単な紹介をした．MATLAB, Simulink は奥が深く，こ

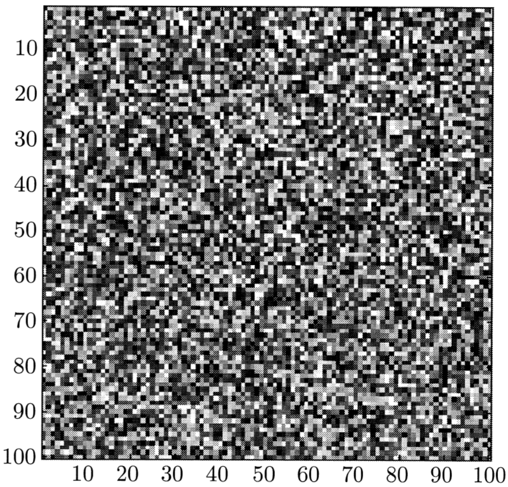


図 4

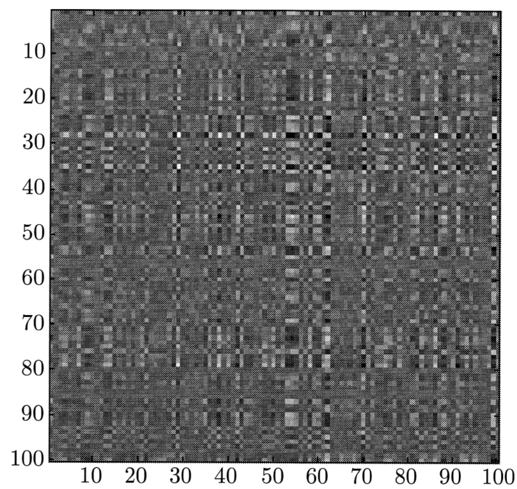


図 5

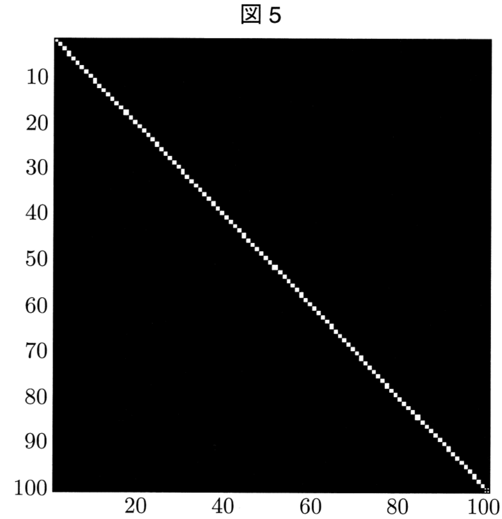


図 6

こではほんのさわりしか述べることができなかった．詳細に関しては多数の本が公刊されているので，それらを参照のこと．またユーザーの作成したたくさんのコードが公開されている．数値計算に関することなら，ほとんど何でもできてしまう．

唯一の欠点の，高価であるという問題に関しては，学生版やアカデミック版を利用することで安くできる．完全にフリーなMATLABクローンとしてはScilab, Octaveがあるが，筆者は使ったことがないのでコメントできない．

MathWorks社のサイト（アメリカ）：
http://www.mathworks.com/
（日本）：http://www.mathworks.co.jp/

ここのユーザーコミュニティーのFile Exchangeでたくさんのファイルがフリーで手に入る．

Mathtools.net:
http://www.mathtools.net/MATLAB/index.html

MATLAB関係の本やリンクが紹介されている．

（まつだ・たくや，神戸大学名誉教授）

行列と写像

その違いと雑感

出 口　哲 生

1. はじめに

行列と写像の違いについて，簡単に説明してみたい．行列と写像の関係は，物理と数学の関係に似ている．両者を比べると，行列は具体的なもの，一方，写像は抽象的なものとして考えられる．大学1年生の頃に線形代数を初めて習ったとき，線形写像というものを考えてこれを基底ベクトルの上で表すときに行列が出てくる，と授業で説明された．しかし，この考え方は抽象的で難しく，しばらく分からなかった．ところが，行列という具体的なものを計算すると何となくイメージがつかめるようになり，そのうちに線形写像を理解することができたと思う．

1.1 行列による基底ベクトルの変換

行列とは数を規則正しく並べたもので，行列の和や積の演算が定義される．一方，写像とは数の集合の間の対応関係を与えるものである．例えば平面から平面への写像は，一方の平面上の点を他方の平面上に移動させるものである．

次の2行2列の行列 $R(\theta)$ を考え，これに対応する写像（線形変換）を調べてみよう．

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

行列 $R(\theta)$ は原点のまわりの角度 θ の回転変換を表すことを示す．平面上に x と y の直交座標を定める．x 軸方向の基底ベクトル $\vec{e}_x$ と y 軸方向の基底ベクトル $\vec{e}_y$ は次のように定義される．

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

平面上の点 P の x, y 座標をそれぞれ x_{P} と y_{P} と表す．ベクトル $\vec{r} = x_{\mathrm{P}}\vec{e}_x + y_{\mathrm{P}}\vec{e}_y$ を点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と呼ぶ．このとき，位置ベクトル $\vec{r}\,' = R(\theta)\vec{r}$ に対応する点を Q とする．そして，写像 $R(\theta)$ を点 P から点 Q へ移動させる変換として定義する．成分で表すと，次の関係式が成り立つ．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1)$$

例えば，2次元平面上に行列 $R(\theta)$ とベクトル $\vec{e}_x$ の作用は，次のように計算される．

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

このベクトルは x 軸から反時計回りに角度 θ の方

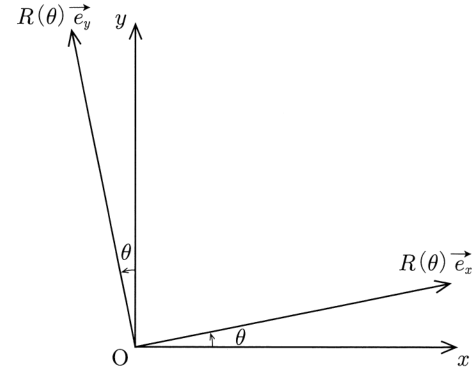


図1　xy 座標系と単位ベクトル $R(\theta)\vec{e}_x$ と $R(\theta)\vec{e}_y$.

向の単位ベクトルである．よって，x 軸方向の基底ベクトル $\vec{e}_x$ は x 軸から反時計回りに角度 θ の方向の単位ベクトルに写された．同様にして，y 軸方向の基底ベクトル $\vec{e}_y$ は，y 軸から反時計回りに角度 θ の方向の単位ベクトルに写される（図 1）．

1.2 変換が回転を表すこと

行列 $R(\theta)$ を用いて定義された写像 $R(\theta)$ は，基底ベクトル $\vec{e}_x$ と $\vec{e}_y$ を，原点のまわりに角度 θ で回転させることが分かった．平面上の任意の位置ベクトルは，基底ベクトル $\vec{e}_x$ と $\vec{e}_y$ の線形結合で表されるので，平面上の任意の位置ベクトルも角度 θ で回転させられる．こうして写像 $R(\theta)$ は，平面上の点を原点のまわりに角度 θ で回転させる写像を導くことが分かる．

1.3 線形性とは重ね合わせのこと

数学で用いられる線形性という言葉は，物理では，重ね合わせのことを意味する．高校で波の重ね合わせの性質を学んだことがあるだろうか．波の重ね合わせとは，2 つの波を重ね合わせたものも波である，ということを意味する．

一般に，ベクトル $\vec{U}$ と $\vec{V}$ の和，$\alpha\vec{U}+\beta\vec{V}$，をベクトル $\vec{U}$ と $\vec{V}$ の線形結合と呼ぶ．ここで係数 α および β は，実数あるいは複素数とする．ここでの線形性は，ベクトル $\vec{U}$ と $\vec{V}$ の足し合わせ（線形結合）もベクトルであるという意味である．

1.4 線形変換の線形性

話を少し一般化して，一般の 2 行 2 列の行列 A に対応する線形変換を考えよう．

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

このとき，点 P の位置ベクトルは，写像の定義 (1) より，次のように与えられる．

$$A\vec{r}=\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}y \\ a_{21}x+a_{22}y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

ここで基底ベクトル $\vec{e}_x$ および $\vec{e}_x$ の変換 $A\vec{e}_x$ および $A\vec{e}_y$ は，次のように求められる．

$$A\vec{e}_x=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad A\vec{e}_y=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

この結果，位置ベクトル $\vec{r}$ の変換 (2) は，基底ベクトル $\vec{e}_x$ および $\vec{e}_x$ の変換の線形結合で表される．

$$A\vec{r}=x\,A\vec{e}_x+y\,A\vec{e}_y\,. \qquad (3)$$

位置ベクトル $\vec{r}$ は $\vec{r}=x\,\vec{e}_x+y\,\vec{e}_y$ と表され，基底ベクトルの線形結合として表される．これに対する変換が (2) あるいは (3) で与えられる．このような性質を，変換の線形性，と呼ぶ．

こうして，行列 A が線形性をもつ変換を導くことが示された．一般に線形性をもつ変換を，線形変換と言う．

2. 最後に

行列から出発すると，線形変換を具体的に確かめながら学ぶことができる．実例から学んでいくので，経験を重視する物理学の視点に近いと言えるであろう．定義から出発する数学的アプローチは，分かってしまえば非常に便利であるが，分かるまでは大変かもしれない．そこで，逆に例から調べていくことも意義があると思われる．

私は数理物理や高分子物理を研究している．数理物理の研究では，事実が明らかになるような具体例をうまく探し出すことが研究上の重要なポイントになる場合が多い．そして，実際の研究の中での感覚は，大学での数学の勉強と同じあるいはその延長上，と言っても良いかもしれない．

線形変換の考え方は，物理学の中では，例えば量子力学などで用いられる．角度 θ を無限小にすると，無限小の変換が導かれ，これは角運動量演算子という物理量に対応する．詳しくは量子力学の教科書を参照すると良いであろう（例えば，桜井他著『現代の量子力学　上・下』（吉岡書店）など）．

（でぐち・てつお，お茶の水女子大学理学部）

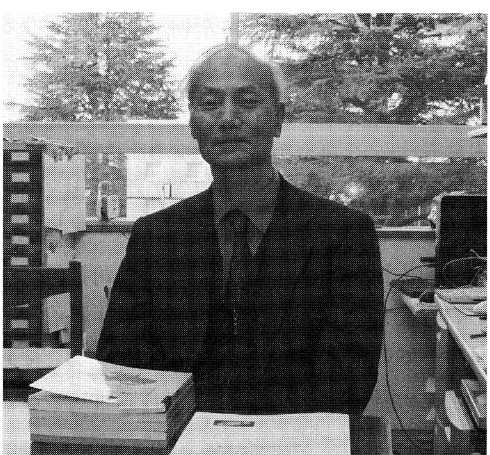
行列で紐解く物理学の世界

坂井　典佑（聞き手：編集部）

1. 行列と物理学―特集テーマについて

――行列は物理学において多様な使われ方をされていると思いますが，どのような使われ方をされるでしょうか．

そうですね．物理学の観点ですぐに思い浮かぶのは，回転です．例えば，2次元の空間の中での回転は2行2列の行列，3次元では回転の角度，すなわちパラメターが3つあり，そのパラメターを使って回転は3行3列の行列で書けます．こういうことは日常でもよく現れ，目に浮かぶものをどうやって数式に書くかという意味で非常に役に立つと思います．



坂井典佑氏．

そういう具体的な側面ともう一つ，量子力学で一番典型的な行列力学という分野があります．この場合は，行列を ∞ 行 ∞ 列という巨大な行列，あるいは抽象的な行列と考えてもいいわけです．このように物理学における行列は，具体的な回転を表す行列から始まって，抽象的な ∞ 行 ∞ 列の行列に至るまで，いろんなところで使われています．

――素粒子論や統計力学の分野ではいかがでしょうか．

例えば，クォークならクォーク，ニュートリノならニュートリノの種類が3つあることが分かっているとします．その3つの種類の間で混合が生じます．最近よく話題になるのは，太陽の中では電子ニュートリノ，すなわち電子の相棒のニュートリノのみができたはずなのに，地球に向かって飛んでくる間に他（例えば μ 粒子）の相棒のニュートリノに変わってしまうということです．そういう現象を記述するのが，弱い力で電子から生じたニュートリノの中にミューニュートリノがどれくらい混じっているかを表す混合行列です．クォークの場合は，2年前にノーベル賞を受賞された小林誠先生と益川敏英先生が提唱した小林・益川行列，また，ニュートリノの場合は，牧二郎先生，中川昌美先生，坂田昌一先生が牧・中川・坂田行列を提唱し活躍されました．

この量子力学では座標と運動量は非可換，互いに交換しない行列として捉えられています．その一方で素粒子の超弦理論では時空座標そのものが，非可換で行列のように考えられています．これは行列で言えば，無限次元の行列ですが，ある抽象的な大きな行列を考えて，それを使って具体的に空間や運動であることを表現します．このように，行列は，特に量子物理学を中心としたところで非可換性を表現する手段として大事だと思います．

また，統計力学における行列は少し変わっています．線形代数に比べると少し抽象的なレベルで行列のアンサンブルを考えて，いろんな行列がどれくらいの頻度で起こるかということを仮定して結果を出します．半導体などが特徴的ですが，例えばある物質があるとします．その物質は非常に均一でしっかりした構造をもっていますが，純粋ではなくいろんなところに不純物が混じっています．不純物がどういう割合でどこに分布しているかはコントロールできませんので，ランダムにいろんなところに入っています．

磁場の場合も，不均一なかつランダムな不純物や外場を表現する手段として行列を用います．その行列がどういう行列であるかという情報で外場の乱雑さを指定しています．このような行列をランダム行列と言い，行列を使って外界の不純度やランダムさを表現して物理的帰結を引き出す役割を担っています．

2. 数学における線形代数との関係

――行列と言えば大学学部初年度で学習する線形代数が思い浮かびますが，線形代数との関係はどのようなものでしょうか．

そうですね．非常に深く関係していると思います．物理学を勉強するとき，方程式を解く場合がありますが，線形の連立方程式は全部行列を使って書きます．一番身近なもので言いますと，電磁気学や統計力学などの物性物理の分野との関係です．

例えば，物質は原子からできていますが，その原子の間のつながりは格子のようになっていて，原子の振動が物質の運動や弾性の振舞いを決めています．そういう多数の原子がどういう振動をしているか，振動の波数と振動数の関係を行列で表現します．このような巨大な原子数くらいの大きさの行列を対角化して，どういうモードがあるか，どういう音が伝わるかなどを理解するわけです．ですから，すべてを原子から解き明かして理解しようとしても，最終的にはどういうふうに行列を対角化して情報を引き出すかという操作になります．たまたま行列が大きいというだけで，初年時の学生さんが出会う 2 行 2 列，3 行 3 列の行列の行列式や固有値を求めることや行列の対角化と基本的に問題意識は同じです．巨大な行列になって，複雑さを増しているだけで非常に密接につながっていると思います．

3. 教育現場では

――学生さんの教育事情はいかがでしょうか．また，物理学を学ぶときの線形代数のよい学習法などがありましたら，お聞かせいただけますでしょうか．

学生さんにもいろんな人がいるので，考え方にも随分違いがあります．例えば，東京女子大学は数理科学科なので数学のある程度の基本的な概念や抽象的な考え方は学んでいるはずだと思います．しかし，具体的な行列の行列式を計算するなどという基礎はあるのですが，高度なものになるとよく考えないと難しい場合があります．例えば，巨大な行列になると特別な行列ではない場合，その逆行列を求めたり，固有値を求めるというのはある程度技術を身に付けている人でないと簡単ではありません．∞ 行 ∞ 列の行列に写す写像，あるいは写像と演算子の場合でも，先ほどお話ししましたように抽象的ですので，必要な数学の知識を身に付けているかどうかが問題になってくると思い



研究室の学生と．

ます．そういった意味で，学生さんも含め，抽象的思考は分かっているけれど計算をしたことがない，また逆にある程度のことは計算できるけれど概念がよく分からないという人もいますので，学習法は人それぞれ違うように思います．

物理学の立場から見て，例えば特徴のある行列について逆行列や固有値を求めたり，それを応用できるということは必要だと思います．何が一番いいかということは一概には言えませんが，私たちが手でやれる可能な範囲にどういうものがあるかを知って学ぶことも重要だと思います．そして，時には数式処理で厳密に対角化したり，数値計算を行うことも一つの手段だと思います．

――外国の教育事情もお聞かせいただけますでしょうか．

そうですね．私は卒業研究で，後にドイツのミュンヘン工科大学に移られた森永晴彦先生に指導を受けました．先生は，「大学の学部教育と大学院教育は大きく異なるが，可能であるなら，日本で学部教育を受けてアメリカの大学院に行きなさい」ということをよく仰っていました．

日本の学部の教育レベルは非常に高いです．日本の大学を出てアメリカの大学院に進むことを例に挙げますと，英語はアメリカ人にとっては母国語なので，競うのは全く無理ですが，数学や物理のGPA（すべての人が受けるべき共通試験）は全米のトップレベルとなる学生さんもよくいます．もちろん，ハーバード大学やプリンストン大学などには大学院生にひけをとらないほど非常に優秀な学部学生もいます．しかしながら，アメリカの大学教育は自由度が高く，例えば物理学科の学生が物理学の授業を全く履修しなくても卒業できるので質が一様ではありません．

アメリカの大学院教育は，日本と比べて非常に充実しています．アメリカの大学は大学院に進むときに一旦再編成する，つまり他の大学の大学院に進むことを奨励しています．そして，国が奨学金を支払って大学院生を育てています．しかし，その人たちのレベルが様々なので，レベルを揃えるためにも初めの1,2年は詰め込み教育を行います．

一方，日本の大学院教育は，あまりつめ込み教育を行いません．大学で高いレベルの教育を受けてきたことを想定して，できるだけ早い時期から研究に打ち込ませています．逆の見方をすると，仮にあまり高い学力をもたずに大学院に進んだ人には，ちゃんとした教育がほとんど施されないということも起こり得ます．そういう点では，森永先生の持論は，一つの方法ではないかと思います．

4. 影響を受けたこと

――先生が研究者になるにあたって影響を受けたことをお聞かせ下さい．

学生時代からいろんな方に影響を受けて，それぞれに印象に残ることがあります．その中のいくつかを挙げますと，一つは大学院時代に西島和彦先生，山口嘉夫先生，宮沢弘成先生という3人の先生方に出会ったことです．あるとき，西島先生に「研究者になるには何が一番大事でしょうか」と尋ねたことがあります．そうしたら，一言「体力ですよ」と仰いました．この場合の体力というのは，単に身体能力があるというだけでなく，一番本質的なものを持続して考えるような力，言わば脳の体力という意味で仰ったんだと思いますが，非常に印象に残っている言葉です．

その後，博士号を取得した後の時期に3年間外国にいて東北大学に就職しました．物理学の人たちは，特に素粒子の分野では，博士号を取得してすぐ大学や研究所などの永久的な仕事に就く人は稀で，いろんなところで経験を積み，成果を上げてから最終的に就職するというのが普通です．

また，国際交流も盛んで海外に行く機会も非常に多いです．海外は，比較的若い年齢の人にとっては競争的な環境ですし，違う文化の環境のところに行き世界中のいろんな研究者たちと出会って切磋するためにも役立ちます．私が博士号を取得して最初に行ったのは，ドイツのマックス・プランク研究所でした．そこは，ハイゼンベルグが亡くなるまで所長をしていた所で，別名ハイゼンベルグ研究所とも言っていました．私が行ったときは，お目にかかって挨拶はしたのですが，残念ながら所長はやっておられず，CERNの理論部の部長だったヴァンホーヴェ氏が所長をされていました．私は，そのヴァンホーヴェ氏から色々教わりながら，2年間過ごしました．研究員は，だいたい2年任期で，任期を終えたら他の場所に移ることになるので，2年目の契約が更新されたとき，その後どこに行くか考えなくてはなりません．そこで，私は所長に相談したところ，「ヨーロッパで大学や研究員として職をもって落ち着こうというつもりがあれば，言葉も学びながら研究し，その国の言語で教える覚悟がないといけない．しかし，いずれ日本に帰るのであれば，研究で業績を挙げて帰ればいい」とのアドバイスをいただきました．しかし，人に教えられるくらいのレベルまでいくのはなかなか難しいので，その後もいろんな方からアドバイスをいただいて，どこに落ち着くことができるか考えたものです．

5. メッセージ

——今後，研究者を目指す方や学生さんへのメッセージをお願いします．

私が大学院生のときに「日本物理学会誌」にある記事が掲載されていました．その記事は，J-PARCのセンター長をしておられる永宮正治先生のお父さんで元大阪大学教授の永宮健夫先生の退官記念講演を後にまとめられて書かれたものでしたが，これから研究をしようとする人に通用するアドバイスだと思いましたので，私なりに受け取った形でお話しします．

研究者になるには，大事でかつ必要なことが3つあります．まず，一番目に，専門分野の基礎知識が必要であるということです．基礎知識がなく理想だけあっても空理空論に終わり，全く何もできません．

二番目は，自分のできることからやるということです．研究者というのは，研究成果を出さなければ研究者として存在できません．私たちの分野は学ぶことが多かったり，やることが難しかったりしますが，まずは小さな問題，身近にある問題の中で，少しでも進歩したという成果を出して論文を書かなければなりません．

最後に三番目ですが，いずれは素晴らしい画期的な仕事ができると信じ，また希望をもって取り組むことです．意外に皆が注目していなかったところで素晴らしい発見があるかもしれません．研究者の日常というのは，正にこういうものではないかと思います．

——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

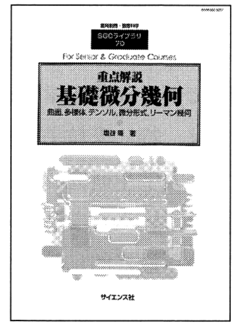
(2010年1月，
東京女子大学善福寺キャンパス研究室にて)

（さかい・のりすけ，東京女子大学現代教養学部）

重点解説 基礎微分幾何

曲面，多様体，テンソル，微分形式，リーマン幾何

塩谷隆著，B5 判，216 頁，本体 1886 円，サイエンス社



本書は，初学者向けの微分幾何学への入門書である．大学初年級での線形代数と多変数の微分法および積分法の基礎知識（有限次元線形空間および内積空間の初歩理論と偏微分法および重積分の知識）があれば理解できるように意図されている．副題にある「曲面，多様体，テンソル，微分形式，リーマン幾何」という 5 つの基礎概念を重点に，分りやすい例を適宜加えながら，本文 200 ページ足らずにおいて解説するという試みである．

本書の一つの特徴は，位相空間論の知識がなくても読めるように配慮されている点である．実際，第 2 章において，座標を持つ空間として多様体を導入し，その接束まで解説されているが，その後に，ハウスドルフ性，多様体の位相，コンパクト性についての簡潔な記述がある．多様体はハウスドルフ位相空間で以下の条件を満たすものという形で定義されることが多いが，数学科以外の理工系の学生や位相空間論の知識のない読者には高いハードルと感じられるかもしれない．ハウスドルフ性の仮定を落とすとどのような困ったことが起こるかについても例示によって説明されている．また「多様体の位相と微分構造のお話」では，ポアンカレ予想の解決，異種球面，4 次元の微分構造に関する深い結果などに少し触れて読者の好奇心を刺激している．

さて，第 1 章のテーマは曲線と曲面である．この章の内容は，導入と同時にまとめの役割も持っている．ガウスの驚異の定理（Gauss's Theorema Egregium）とその解説がある．第 2 章から多様体に舞台を移して議論が展開され，すこし抽象的となるであろう．合成関数の微分法と座標変換に伴う計算を丹念に追いかけることが求められる．第 3 章のテーマは，テンソル場と微分形式である．読者の線形代数の理解が試されるところである．双対空間，双対基底，基底の変換行列など線形代数からの言葉の準備に続き，多様体の接空間と余接空間という 2 つのベクトル空間が出揃うことになる．このあと，テンソル場と交代形式が導入され，「ベクトルには添え字が下に，その係数には上に，余接ベクトル空間（双対空間の元）には上に，その係数には下に添え字が付いている．上のような基底と係数の変換則を見ると，和をとるときに，必ず上の添え字と下の添え字をペアにしている．これは，式を覚えるにしても，計算ミスを防ぐことにも役立つ」（引用）．ユークリッド空間での図形的意味を明示しながら微分形式の解説が進み，目標であるストークスの定理が丁寧に証明されている．第 4 章ではリーマン多様体上での微積分法の基本が解説され，測地線の長さに関する第 2 変分公式の応用としてボンネ・マイヤースの最大直径定理が証明されている．曲率テンソルは，共変微分による天下りの方法ではなく，平行移動を用いて空間の曲がり方を表現するものとして定義されている．曲線の長さに関する変分法は，考え方のみの概略ではなく省略せずに説明されている．

ここで，本書まえがきより一部引用する．「定義や概念などは，初学者に分りやすいよう，できるだけ図形的もしくは直感的な定義を採用し，その定義・概念の意味の説明を心掛けた．また途中から読んでも読めるように，前に学んだ定理や補題を使う場合は，できるだけ引用を明示した．証明はあまり行間を飛ばさずに丁寧に書いたつもりである．…中略… また，本書では必要最低限の事項のみに止めて，比較的高度なところまでの解説を試みたので，決して包括的な本ではないことをお断りしておく．もし読者が微分幾何学の研究者を目指すなら，本書を読んだ後，ぜひ他の本も読まれることを勧める．」

微分幾何学で整理された表現や概念は，力学，物理学，工学，情報科学などにおいても使われる．読者が将来，より高度な専門書や論文に現れるテンソル場や微分形式，接続を用いた微分法あるいはそれらによって表現されるものの理解に混乱を感じたとき，この本に戻ればよいであろう．

加須栄 篤（金沢大学理工研究域）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

伊 東 恵 一

1980年7月号

30年ほど前，ゲージ理論の構成について書かせていただいたが[1]，編集部からこの後日談（？）を書けとのご指名である．当時僕も20代後半で，今読み返すと気負いが感じられて少し恥ずかしい．

今の素粒子論の基礎になっている非可換ゲージ理論の登場から数年たった頃で，数学的にこれを構成しよう，この理論でクォーク粒子の閉じこもりを証明しようと皆躍起になっていた．僕は当時荒木不二洋先生のご提案で，中西襄先生による不定計量空間の上で，ゲージ理論の雛形である2次元量子電気力学を構成すべく悪戦苦闘していた．

ゲージ理論を構成する場合，負の存在確率をもつ粒子が表れ，負の内積を持つ空間と正の内積を持つ空間からなる不定計量空間というものが必要になる．いわば無限次元のミンコフスキー空間の上で関数解析を行うことになるが，砂漠の中で磁石もないまま歩くような焦燥感を感じた．当時九州大学の富田稔先生も不定計量を研究しておられ，セミナーに出たが「不定計量空間上の自己共役作用素の研究は任意の作用素のスペクトル分解を研究するようなもの」と仰られ，考え込んでしまった．

しかし自分を鼓舞して，まず不定計量空間上のボゴリューボフ変換の理論を，未解決の部分を残しつつもなんとか完成し，次にこの量子電気力学の雛形モデルに応用して論文に仕上げた．これらの論文を基にして書き上げたのが解説[1]である．

その少し前の夏，IHESのセミナーで話し，偶然滞在して居られたR. Jost先生たちにほめていただいたが，J. Fröhlich氏には「何で自然界に存在しない不定計量を研究するのか」と例の調子[2]で言われ，返答に窮してしまった．今なら言い返すのに，一緒にIHESにいた三輪哲二さんに「伊東君は気が弱いからな」とニヤニヤ言われたのを今でも思い出す．

そのあとユークリディアン・ゲージ理論の視点で研究を始め今に至るが，皆の恐るべき努力にも関わらずゲージ理論の構成も，クォークの閉じこもりも未解決



である．非可換群の処理は予想をはるかに超えて難しく，皆途方にくれたのである．

当時の研究仲間の顔が彼らの訛りのある英語とともに時々頭をよぎる．その忸怩たる思いは，クレイ研究所の懸賞金付の奇妙に曖昧な問題文[3]に漂う．自然を数式で記述，理解することは果てしない道のように見える．幾つかの知見を得，幾つかの未解決問題を路上に残しつつ時代は変わる．

注と参考文献

1) ゲージ理論をいかに構成するか，数理科学「場の理論」特集号（1980年7月号）伊東恵一．
2) 説明がいるのですが，あえて残しました．
3) http://www.claymath.org/millennium/

（いとう・けいいち，摂南大学理工学部）

書籍紹介

数理科学の振興
現代数理科学事典の刊行に寄せて

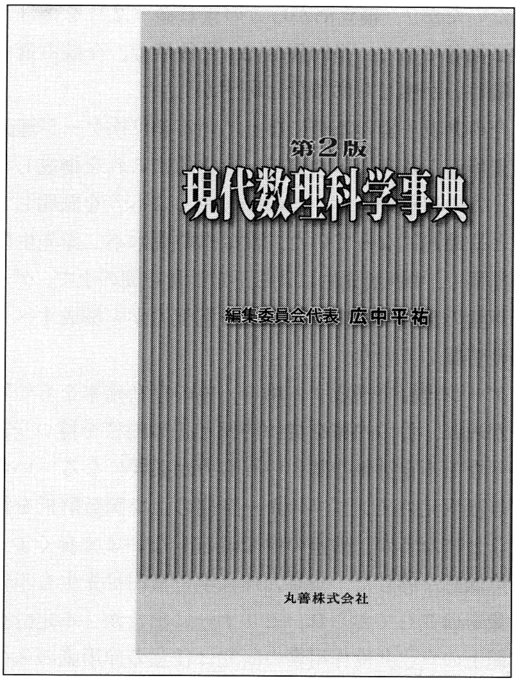
甘利　俊一

数学は人類の文化である．世界の各地で，文明の発生とともに数学が芽生えた．バビロニアでは，4000年も前からピタゴラスの定理が知られていたというし，2300年ほど昔にギリシャで花開いたユークリッド幾何学も見事なものである．日本でも，江戸時代に和算が花開いた．

人は優れた脳を持っている．この脳は，物事を概念として捉え，推論を行う．この能力が心を生み，言語を生み，数学を生んだ．人間の論理的な思考を体系化した数学は，現実の問題に即して発展してきた．数学をする心は普遍的であるから，18世紀，19世紀の著名な数学者たちは同時に数理科学者でもあった．20世紀になって，数学は現代化（抽象化）を達成し，大きく発展した．同時に，他の諸科学から切り離された「純粋数学」ができ上がる．もちろん人間の思考は，どの分野でも数学的に整理された体系を求める．例えば，情報理論，制御理論，最適化理論，ゲームの理論など，数学的な理論とそのための手法を作ってきた．これらは「数理科学」として個別に発展することになる．

問題は，純粋数学と数理科学との間に，深い溝ができてしまったことである．これではいけないという考えは20世紀半ばから巻き起こり，欧米では数学と数理科学を一体的につなげて大きく振興する必要があるとして，数々の改革，振興策がとられた．この流れに遅れたのは日本である．

日本でも多くの分野で数理科学が積極的に展開されて，世界をリードする成果も少なくない．しかし，分野は多岐にわたり，その全貌を知ることは難しい．こんなことから，数理科学の事典を作ろうという動きが起こり，大阪書籍から1991年に刊行された．それ以後の数理科学の発展は目覚ましい．そこで，本格的な改訂を加えた第2版（改訂版）を丸善から刊行することになった．200名を超える専門家がこの事業に加わり，7年の歳月を経て，1500ページになろうとする大冊の刊行にこぎつけた．

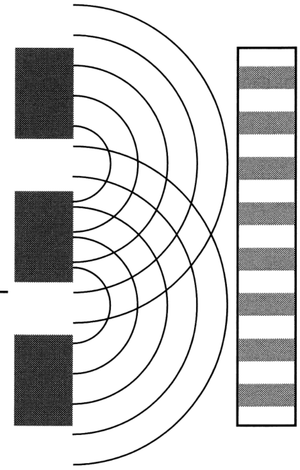


この事典は，現代の数学の手法も含めて，物理，情報，制御，最適化，心理，経済など多くの分野にわたり，各項目が体系的に配置され，読んでわかる構成になっている．研究の中で，気になる概念や手法に出会ったときに本書を紐解けば，その分野の体系や手法が分かり，さらに高度の文献を参照する手引きにもなる．数理科学振興が重要視される今，本書がそのための助けとなるに違いない．編集に携わった一人として，本書が数理科学に関心を持つ研究者，研究室に座右の書として置かれ，多大な効果を発揮することを願うものである．

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

目で見て学ぶ量子力学

第19回 実験でひもとく量子の不思議



見えないものを見る

外村　彰

19.1 はじめに

“ミクロの世界” や “量子の世界” に魅せられて，筆者は，“より干渉性の良い電子線” を開発しては，見えなかったものを見るという挑戦を40年以上にわたって繰り返してきた．電子で見るミクロの世界は，とてもきれいである．さらに量子の世界になると，我々の常識では，とても理解し難い不思議なことに出逢うことがある．

今回は，電子で，どこまで小さな世界が見えるのかを考えてみたい．

19.2 ものを見る

「そもそも，ものを見るって，どういうことだろう？」— “もの” に当たって跳ね返った光が目の中に入り，網膜上に光の像を結ぶ．このプロセスはテレビカメラと同じで理解しやすい．それが電気信号に変換され脳に送られ視覚となって，“もの” を認識することになる．後半のほうは，理解しにくいが，そこが人間の能力のすごい所であり，不思議な所でもある．これは脳のなせる業に違いない．

一度逢っただけの人に再会しても誰だとすぐに分かるのに，名前は忘れてしまっているときがある．言葉が生まれるよりもずっと昔から長い年月をかけて，人間にとって重要な情報を抽出・記憶し，取り出す能力が脳にきざまれているのだろうか？ また，きれいな自然の姿を見ると，深い感動を覚える．これは，一体何がそうさせるのだろう．どんなパターン，どんな色合だったら感動するのだろう．物理法則の背後にある “対称性” が美しさに関わっているのかと思ってみても，それだけでもなさそうである．でも，この “美しいと感じる能力” も，

長い年月の間に脳が自然から学んできたものに違いない[1)]．それがなかったとしたら，私なんか，研究者の道に進むことはできなかった．美しさに憧れ，感激すればこそ，何年も要する開発にチャレンジしたり，無駄な労力も苦にならなかった．それに，実験結果が本物かどうかを見きわめるのに，得られた結果がきれいかどうかで判断してきた．特に，理論的な予測ができない場合，美しいかどうかという直感で，本物かどうかを判断してきた．

ただ，このやり方には，人一倍の努力が必要である．まずノイズをきれいに取り去らなければならない．そもそも実験をデザインするときから頭をひねらなければならない．そのためには，まず装置の性能が第一なので，通常は物作りから始めることになる．

17 世紀という大昔に A. レーウェンフックは，手作りのガラス玉で作った顕微鏡で，微生物の世界を見つけた．さらに小さいものを見たくて，性能をどんどん向上させ，一生の間に作った顕微鏡は 500 台を超えた．彼が作った単レンズ顕微鏡は，性能が抜群で，後に発明された高倍率の複式顕微鏡でも，かなわなかった．200 年後，収差補正レンズが実現するようになり，ようやくレーウェンフックを超える顕微鏡が実現した．

19 世紀半ばに E. アッベによって，どんな精巧な顕微鏡を作っても，光を使う限り，その波長で決まる限界があることが示された．実際，顕微鏡でも見えない小さな生物がいることは分かってはいたが，その後 50 年もの間，分解能が向上することはなかった．野口英世が，命がけで探し求めた黄熱病の病原体は，顕微鏡では見えるはずのないウィルスだった．

きれいな姿を捉えるには，性能の良い装置がありさえすれば良い訳ではない．サンプル作りやその環境にまで工夫をこらさなければならない．空気の澄んだチベットの景色や，ハッブル望遠鏡で見る銀河は，大気中のゴミや空気のゆらぎがないので，みとれてしまうほどの美しさである．曇りのない目で本物の自然を見ると，感動が待っている．

湯川秀樹先生は，『目に見えないもの』（講談社学術文庫，1976 年）の中で，目を病んで気づいた“ものを見る”ことの大切さを語っている．目で見る手だてのなかったミクロの世界—中間子，広がりを持った素粒子，時空の単位“素領域”など—を想像力を頼りに自分の頭の中にイメージを思い浮かべながら解き明かそうと挑戦している湯川先生の姿が彷彿とする．

19.3 電子で見えないものを見る

私が大学 3 年のときに学んだ量子力学の講義で，梅沢博臣先生が黒板に大きく描いてくれた電子の波の様子は，じかにこの目で見ることができないはずのものだった．—「でも見てみたい．工夫をめぐらし，新しい技術を開発する努力を厭わなければ，見えてくるのではないか？」—電子の波面そのものは確かに理論的に観察できないが，平面波を重ねれば，電子の波面が干渉縞の形で可視化できるはずだ．実際レーザーのような干渉性の良い電子線を開発して，電子

の波面が，水面の波紋のように，自在に見えるようになったときには感激した．

電子の波を使って量子の世界を見てやろう—そんな思いから，より干渉性の良い電子線を繰り返し開発して，結局，40 年以上にもわたって量子の世界を見る努力を続けてきた．量子の世界は我々の常識を逸脱している．電子は，“粒子” かと思うと，“波” としての姿を現す．電場や磁場に触れてもいないのに，波面がずれる．この波は波動方程式に従って，時間的な変化をたどる．水面の波紋が広がっていくのと同じく，初期条件を与えれば任意の時刻の様子は決まる．だが，それを観察しようとすると，突然，電子が粒子として検出される．通常の解釈では，波動関数が一瞬のうちに 1 点に収縮すると考える．波動関数で決まるいくつかの可能性のうちから 1 つが選択される．結果は確率的に起こるので，予測はできない．こんな常識をはずれた不思議なことが起こる量子力学に満足しない人はたくさんいたが，量子力学の予測は，今までの所，完璧である．我々の常識とか直感は，これまでの知識や経験が脳の中に蓄積されたものだろうから，見たこともない “量子の世界” を非常識と脳が判断するのは，当然な気もしないではない．でも，それでは我々の思考能力の可能性を放棄した気もする．

そもそも，量子力学が完璧で，未来永劫成り立つとも思えない．私自身，ひょっとして実験的に量子力学の不備が見つかるかも知れないというあわい期待を持って量子の世界の観察実験を重ねている．

電子で顕微鏡を作る試みは，量子力学ができ始めた頃に遡上る．「電子が波で，光の 10 万分の 1 もの短い波長を持つ.」というド・ブロイの仮説を知ったベルリン工科大学の E. ルスカは，“電子を使った顕微鏡” の開発に熱中する．1938 年に，シーメンスと共同開発した分解能 100 Å の装置によって，これまで想像もしなかったバクテリオファージ[傍注1] が，その姿を現したときには，世界中に衝撃が走った．その後，電子顕微鏡の分解能はどんどん向上し，ミクロの世界が次々と明らかになっていった．

［傍注 1］　細菌に寄生し増殖するウィルスで，100 Å から 1000 Å と小さいので，電子顕微鏡でなければ見えない．月面着陸船のような形をしている．

虫メガネにしろ，顕微鏡にしろ，望遠鏡にしろ，光が目に入ってくるので，“見る” という範疇に入る気がする．しかし電子を直接目の中に入れる訳にはいかないので，“電子で見る” というのには，違和感がある．一旦，フィルムに撮影するか，蛍光板やモニター上に写すかして，それを目で見ることになる．こうして，光学顕微鏡で見える世界を超えて，さらに小さな世界が見えるようになってきた．

19.4 玉葱のような自然—自然の階層—

顕微鏡で自然を拡大して見ると，どんどん小さな美しい世界が開けてくる．そこらにころがっている “石っころ” でも，生き物でもそうである．“むいてもむいても皮が出てくる玉葱” のようなものである．一体どこまでいくのだろう？巨大な銀河から，地球，人間，そして微生物，原子，電子，クォークと，自然は何と広範な構造を持っているのだろう[傍注2]．我々が肉眼で見ることができる

［傍注 2］“Powers of Ten” (Philip and Phylis Morrison and The Office of Charles and Ray Eames, Scientific American Library, New York, 1982) という本に 10^{25} から 10^{-16} m に至る世界が紹介されている．10^{-9} m までは写真があるが，それより小さな世界は，まだ写真で見ることはできない．

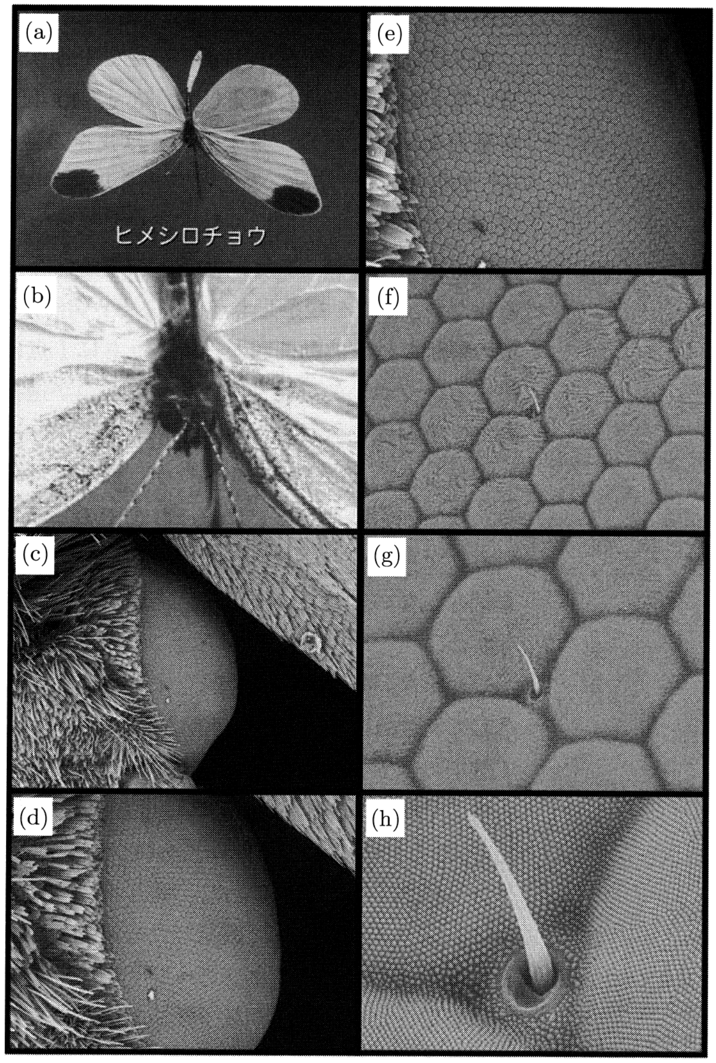


図 19.1　ヒメシロチョウの拡大写真：(a) カメラで撮影した写真，(b) 光学顕微鏡像，(c)–(h) 走査型電子顕微鏡像．

のは，ほんの一部分に限られている．しかし，じかに見えなくても，道具を使えば宇宙から極微の世界まで，いろいろなスケールのものを見ることができるようになった．

身近にあるものを顕微鏡で見るだけでも，自然の階層に感激する．先日，若者向けの講演会で，蝶々の複眼を光学顕微鏡と電子顕微鏡でどんどん拡大して見たことがある．これだけでも充分感銘を受ける．図 19.1 にその何コマかを示した．デジカメで撮影したヒメシロチョウ (a)，光学顕微鏡で見た目玉 (b)，あとは電子顕微鏡で拡大していった写真である．(c) は，複眼だが，その一部分を拡大していくと，ハチの巣のようにびっしりと整列した六角形の目 (e) が現れる．この目は，1 万個もある．人間は，2 つの目で物を見て，脳の中で立体的に見る．これだけでも不思議だが，蝶々や蟻は，1 万個もの目からの映像情報を，脳でどうやって処理しているのか，不思議である．

さらに拡大していくと，ヒゲのようなもの (f) が，所々に現れる．目玉に何故ヒゲが必要なのか分からない．こんなものがあったら，ものを見るときに邪魔になる気がするが，きっと役割がある．さらに拡大すると，今度は，きれいに整列したコメツブのようなもの (h) が見えてくる．これもどんな役割をしているのか分からない．でも，きれいだ！

そこらにいくらでもいる“蝶々の目玉”が，“こんなに見事で，きれいな構造”からでき上がっていると思うと，こんなものを作った自然に尊敬の念を抱かざるを得ない．我々がいくら優れた材料を開発したといっても，たかが知れている．

この像をさらに拡大すると，原子や分子の並びが見えてくるはずである．私が大学に入った1960 年当時，電子顕微鏡で原子を見ることはできなかった―本当に見えるのか，どんな風に見えるのか？ 原子を見るというのは，波動関数を見ることになるのだろうか？ そうだとすると，不確定性原理が効いてきて“原子は原理的”に見えないなどと言うことになりはしないか？

電子を原子に当てても，原子の $\frac{1}{1000}$ ほどの質量しかないので，原子を跳ね飛ばしてしまうほどの影響はない．だから，原子に当った電子は θ だけ方向を変えて出ていくと考えれば良い．原子で散乱された電子を電子レンズで結像すれば，原子が観測できることになる．

不確定性原理によれば電子の位置を x，運動量を p_x とすると，それぞれの不確定性は $\Delta x \Delta p_x > \hbar$ を満たさねばならないので，原子の位置 x を観測しようとしても，Δx だけ不確定になる．原子の 1 点からあらゆる方向 $(p_x = p\theta)$ に散乱された電子は，レンズによって 1 点に結像される．しかし，いくら良いレンズを使っても Δp_x を ∞ にすることはできないので，Δx の最小値は，電子の波長 λ で与えられる[傍注3]．しかし，原子も原子核と電子で構成されており，原子の形は原子核を取りまく電子の形で決まっている．だから，この電子 1 個を見ようとしても不確定性原理が効いてきて難しそうである．

1963 年に R.P. ファインマンはこう述べている[2)]．

> The atoms are so small that you cannot see them with a light microscope, in fact, not even with an electron microscope.

原子を見るのは，当時の電子顕微鏡屋にとって，“はるかな夢”であった．波長 0.04 Å（10 万ボルト）の電子線を備えた電子顕微鏡は存在していたので，原子が見えても不思議はなかった．にも関わらず見えなかった．電子レンズに凸レンズしかなく，収差を補正する手だて[傍注4]がなかったので，分解能がレンズ収差で数Å に押さえられていた．さらに，1 個の原子を真空中にどうやって支えるかということもある．今では，収差が徐々に小さくなり分解能も向上し，支持膜の問題にも工夫が重ねられ，重い原子ならば観察できるまでになった．電子は，それだけに止まらない．電子は電荷をもっているので，光では見ることのできない電場や磁場も見ることができる．アハラノフ・ボーム（AB）効果といった量子現象も見えるので，量子の世界を見るにはうってつけである．たとえ電子で見ても，感動は伝わってくる．

[傍注 3]　レンズは 1 点から四方八方に出た電子を 1 点に集める．電子を波と考えると，これらすべての経路に沿っての光路長位相を同じにする．レンズでは，散乱角 θ，つまり $p_x = p\theta$ を限定する訳ではないので，Δp_x をできる限り大きくとれば，位置の不確定性 Δx は，不確定性原理による限界まで小さくすることができる．Δp_x はレンズの開口角（α）で決まるので，$\Delta p_x = p\alpha$ となり，$\Delta x > \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{\hbar}{p\alpha} = \frac{\lambda}{\alpha}$ となる．つまり，およそ波長 λ によって与えられることになる．α はレンズに取り込む角度で決まるが実際の電子レンズでは，レンズ収差のために，これまであまり α を大きくできなかった．

[傍注 4]　光学レンズでは，凸レンズと凹レンズと組み合わせて正と負の球面収差で無収差結像系を実現する．電子顕微鏡では，通常，軸対称磁場がレンズとして使われているが，これでは凸レンズしかできない．このため，収差を補正することができない．最近になって，軸対称性を破ったレンズで収差を補正できる可能性が生まれた．加速器実験の研究者にとっては当然の技術だが，電子顕微鏡では原理的には可能だが技術的に達成できないものと諦めていた．諦めずに頑張ったドイツのグループが，先端技術を駆使してその可能性を示し，電子顕微鏡にも再び性能向上の可能性が拓けた．

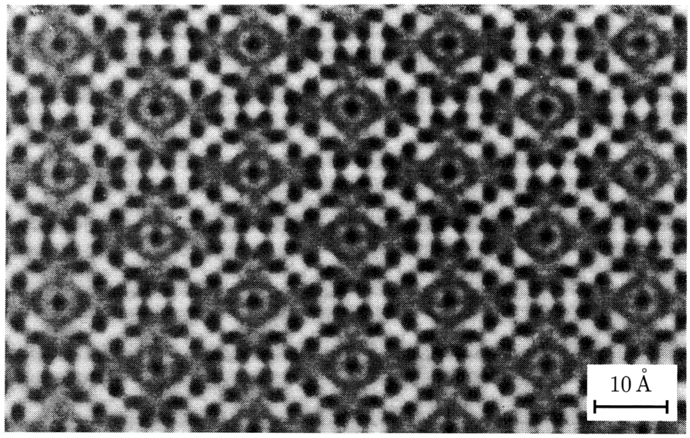


図 19.2　塩化銅フタロシアニンの写真（植田夏）.

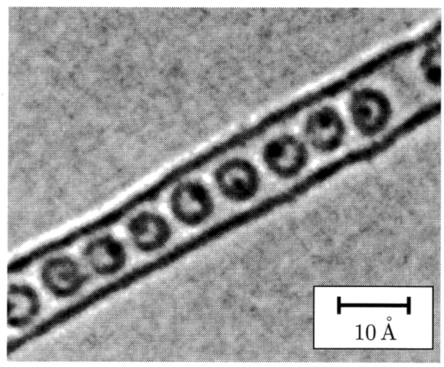


図 19.3　カーボンナノチューブの中に重原子を含む C_{60} を入れた写真（末永和知，飯島澄男）.

19.5 電子顕微鏡で見る美しい原子分子の世界

原子レベルの電子顕微鏡写真で，私が感動した写真を２つお見せしよう．植田夏先生の分子結晶の写真[3)]（図 19.2）は 30 年も前に得られた写真だが，原子一個一個が分解され，実にきれいだ．ただし，本当に１個の原子ではなくて，電子の入射方向にいくつかの原子が重なっている．しかも分子が周期的に並んでいることも結像上有利に働く．この写真を苦労して撮影したのは，当時，京大の技官だった藤吉好則さんだったと聞く．もう一つは，カーボンナノチューブの中に球状の C_{60} 分子が入った写真[4)]（図 19.3）である．原子分子の世界で，チューブの中には C_{60} 分子が，そして C_{60} の中には重い原子が入っている．

「原子１個を見たいが，どうしたら支えられるか？」―これは大昔からの問題であり，うまい工夫をしたものである．こんなサンプルを自在に作り，その様子をリアルタイムで観察したという飯島澄男さんの発表を聞いたときには感動が込み上げてきた．これを撮ったのは産総研の末永和知さんである．

原子を一体のものとして見るのに，電子はちょうど手頃である．原子を跳ね飛ばしてしまうほどの大きさでもないし，かといって小さすぎて素通りしてし

まう訳でもない．しかも電子の波長は加速電圧を100万ボルトまで上げれば，0.002 Å と原子の大きさの1000分の1になり，数Å の原子の姿を見るのには充分である．しかし，分解能は，これまで，レンズ収差によって1 Å 近くで足止めをくっていた．だが，原理的には波長による原理限界にまで近づき得る．実現できていないのは，ひとえに我々の知恵と努力が足りないからだ．そんな装置ができ上がれば，見えていない世界がまた見えてくる．原子は，今，やっと“点”として見えるようになった．

原子は，これ以上分割できないという意味で，“アトム”と呼ばれていた．しかし原子は点状の“アトム”ではない．様々な形をして，他の分子と結合している．そんな原子の姿を捉えることも充分に可能である．さらに小さな構造もある．原子の中心には，その1万分の1という小さな原子核があり，その周りを電子が取り巻いている．さらに原子核は中性子や陽子からなり，それらは，さらにクォークから構成されている．原子よりも小さな構造は，まだ像として捉えることはできていない．大きな運動エネルギーをもった粒子が，霧箱，泡箱，乾板などを通りすぎると，痕跡を残してくれるので通り路がわかる．飛行機雲のようなもので，粒子の姿を捉えたことにはならない．

電子線の加速電圧をもっと上げて，波長をさらに短くすれば，ひょっとしたら，原子の1万分の1の大きさの原子核の姿やその周りの電場を見ることだって可能かも知れない．蝶々の複眼を見たときのように，原子の姿をズームアップしていくと原子核周辺の電位分布まで見えたら愉快である．勿論，これだけ小さいものを見ようとして，波長を短くしなければならないので電子のエネルギーが大きくなって，見たいものに影響を与える．跳ね飛ばしたり，壊したりしてしまうこともある．これは，原理的宿命である．でも，量子力学を使うと，ひょっとするとあまり影響を与えずに観察できる可能性があるかも知れない．

19.6 超高分解能電子顕微鏡への夢

電子顕微鏡発展の歴史は，電子レンズの性能向上の歴史でもある．1927年にH. ブッシュ[5)]が軸対称磁場が電子線に対してレンズ作用を行うことを理論的に見出して以来，レンズ性能の向上に伴って，ミクロの世界がどんどん見えるようになっていった．初めは静電型レンズもあったが，磁界型の軸対称レンズは，実に60年もの間生き残ってきた．しかし1960年代になると，いよいよ電子レンズに改良の余地もなくなった．分解能を制約している球面収差や色収差は，軸対称性を崩せば補償することができることは1950年代から分かっていた．実際，加速器実験では，収差を除いた多重極レンズが用いられている．しかし，電子顕微鏡用には，機械的精度が追いつかないために，諦められてきた．電子線ホログラフィーも，実は収差を補償する手法として考案された．これは，充分に干渉性の高い電子がなかったために発展せず，電界放出電子線の登場によって，ようやく緒についた所である．

レンズ収差の重要性はいまさら言うまでもない．I. ニュートンはニュートン



(a) ハイダー　　(b) クリュー

図 19.4　収差補正レンズを実現した研究者．(a) M. ハイダー，(b) A.V. クリュー．

力学で有名になったが，その 10 年も前に，色収差のない反射望遠鏡を作って普及させ，世に認められた．ガラスのレンズは光の波長で屈折率が異なるので，星を見ても，虹色になってボケてしまう．これが，色収差である．しかし，反射鏡を使えばガラスを使わないので波長によって像がボケることはない．

M. ハイダー（図 19.4 (a)）らによって電子顕微鏡の収差補正の可能が示されたのは，1989 年である[6]．A.V. クリュー（図 19.4 (b)）は異なった方式で収差補正を実現した．クリューは若くして加速器の分野で大活躍し，34 才という若さでアルゴンヌ国立研究所の所長にまでなったが，後に電子顕微鏡の分野に参入し，原子を初めて見るという偉業を成し遂げた．2009 年暮に亡くなった．

収差補正によって，性能向上の余地がないと思われていた電子顕微鏡にさらなる発展の可能性が示されるや，それまで日本やヨーロッパに先を越され辛酸を舐めてきたアメリカが，政府主導の下に，直ちに新しい政策を打ち出した．2001 年，“TEAM”（transmission electron aberration-corrected microscope）プロジェクトを立ち上げ，ナノやバイオの研究でイニシアティブを取るべく，エネルギー省（DOE）傘下のアルゴンヌ，オークリッジ，バークレーなど 5 つの国立研究所に前例のない投資を行った．

これに負けじとヨーロッパでも，2006 年に欧州連合（EU）プロジェクト“ESTEEM”（enabling science and technology for european electron microscopy）を立ち上げ，EU 諸国間の連携と要素技術開発に着手した．こうした新装置の開発熱に伴って，産業面では FEI（アメリカ，フィリップスの子会社），CEOS（ドイツ，収差補正技術），NION（アメリカ，収差補正技術など）の技術や生産が急激に高まり，日本のお家芸を追い越す勢いにある．収差補正電子レンズの開発で自信を付けた研究者たちは，国の支援によって，さらに活気づき，今では，パルス電子源や検出器などの開発にも意欲を燃やしている．

遅ればせながら日本でも，文科省が電子顕微鏡検討委員会を設置し，その報告書に基づいて，2006 年夏から要素技術開発プロジェクトがスタートし 2009 年 3 月に終了した所である．

我々は，このプロジェクトで，収差がなくなったら，どこまで分解能が向上するかを調べるべく，格子像で分解能限界の追求を行った．格子像は特定の周期構造だけを結像するので，レンズの特定の部分を使うことができる．このため，レンズ収差が同じになるレンズの位置を利用すれば，収差を打ち消すことができる．この方法で，0.2 Å の格子像が得られることは確認できた．これは原子を固定するステージなど分解能を制約する因子の合計が 0.2 Å 以下になったことを意味している．

収差補正の効果で，きれいな写真も撮れ始めている．末永さん，飯島さんの努力で，軽元素の原子 1 個がきれいな写真として，見えるようになり，感銘を受ける．

そこで，我々も，じっとしてはいられなくなり，超高分解能超高圧ホログラフィー電子顕微鏡の開発を提案している．100 億円もかかるが，波長が短かく単色性のよい超高圧電子線を用い，収差補正レンズと電子線ホログラフィーを組み合わせた壮大な計画である．これで D. ガボールの夢であった原子で散乱された電子の波面を見たい．

一体人類は，どこまで小さなものを見ることができるのだろうか？ チャレンジしなければ，可能性は拓けない．

19.7 おわりに

今回は数理科学とは思えないような内容になってしまった．きれいな自然の姿を見たいと思う好気心が新しい可能性を拓くことを言いたかった．だが，これは実験に限ることではない．ヤン・ミルズ理論でゲージ場の理論で統一理論の第一歩を拓いた C.N. ヤン先生が言われたことが，今だに頭に残っている．

「この理論では，ゲージ粒子の質量を予言することはできなかった．しかし理論がきれいだった．それで論文にした」―これが，その後，素粒子分野で最も引用の多い論文になった．

参考文献

1) 藤田一郎：『「見る」とはどういうことか』（化学同人，2007 年）．
2) R.P. Feynman *et al*: *The Feynman Lectures on Physics* **1** (Addison Wesley, Reading, 1963) 1–8.
3) 植田夏，小林隆史：電子顕微鏡 **11** (1976) 126–131.
4) K. Suenaga, M. Tencé, C. Mory, C. Colliex, H. Kato, T. Okazaki, H. Shinohara, K. Hirahara, S. Bandow, and S. Iijima: *Science* **290** (2000) 2280–2282.
5) H. Busch: *Arch. Elektrotech.* **18** (1927) 583–594.
6) M. Haider, S. Uhlemann, E. Schwan, H. Rose, B. Kabius and K. Urban: *Nature* **392** (1998) 768–769.

（とのむら・あきら，（株）日立製作所基礎研究所／（独）理化学研究所基幹研究所）

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第6回 —立式で鍛える論理的思考法—

ブラウン運動，ゆらぎおよび秩序生成

確率的方程式

鈴木 増雄

1. はじめに——ブラウン運動とは

原子や分子に比べて比較的大きな粒子が周りの原子や分子の**熱揺動**の影響で行う**不規則な運動をブラウン運動**という．もともと，植物学者の R. Brown が 1828 年に花粉から出た微粒子があたかも生きもののようにジグザグと動き回ることを発見したことに始まる．彼は，長年かけて，この運動が生命とは関係なく物理現象であることをつきとめた．

この不規則な運動を理論的に扱うには確率的な処方が必要である．数学的には**確率過程論**の問題になるが，ここでは，通常の物理的な取扱いの範囲で議論する．これは，**伊藤タイプ**ではなく，**ストラトノヴィッチタイプ**に対応する．言わば，これは時間きざみに対して**対称化した取扱い**である．対称化することにより，**不規則性**を少し「滑らか」にして取り扱い易くしている[1, 2]．ブラウン運動を扱う微分方程式の中にデルタ関数のような微分不可能な超関数が入っているが，あたかも通常の微分方程式のように扱う．これがランジュバン方程式の特徴である．

この解説では，このような個々の不規則な運動をそのまま扱う**ランジュバン方程式**だけでなく，それを全体として扱う**偏微分方程式の方法**についてもふれる．現象の本質を含む，できる限り簡単な方程式を立てることを目指す．

2. アインシュタインのブラウン運動の理論[1, 2)]

空気の抵抗を受けながら落下する雨滴や液体中を拡散するコロイド粒子などの振舞いを記述するにはどうしたらよいか．最初から何もかも取り入れてきちんと扱おうとすると，複雑過ぎて本質が見えにくくなる．そこで，これらの物理現象をできる限り理想化し簡単化して考えることにする．

重力のような外からの力を受けていない雨滴の空気中の運動をまず最初に考えてみよう．雨滴が空気分子に衝突するたびに小さな力を受けて速度が変化する．空気分子の数は非常に大きいので，短時間の間に何回も向きの異なる衝突をくり返す．これが**不規則な運動**，すなわちブラウン運動の実体である．空気の温度 T が高くなるほど，空気分子の運動エネルギーが平均として大きくなるから，衝撃の強さも大きくなる．

次に，重力の影響を考慮することにしよう．落下の速さを v とすると，その時間変化 dv/dt は，ニュートンの運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = f + mg \qquad (2.1)$$

で与えられる．ただし，m, g および f は，それぞれ，雨滴の質量，重力加速度および空気から雨滴の受ける力を表す．ここで問題になるのは，力 f の中味である．重力などの外力でマクロな大きさの速さを持った雨滴に働く空気分子の衝突の効果は進行方向と逆方向とでは異なってくる．その差が雨滴に働く**空気の抵抗**となる．それは，雨滴の速さ v と共に大きくなるはずであり，速さが小さいときは，v に比例する．その比例係数を ζ とすると，抵抗力は $-\zeta v$ と書ける．もともとの不規則な力は $v=0$ でも存在する．それを $\eta(t)$ と書くことにする．定義により，その**ランダム平均** $\langle\eta(t)\rangle$ は零である．こうして，空気から受ける力 f は

$$f = -\zeta v + \eta(t) \tag{2.2}$$

と表される．

不規則な力 $\eta(t)$ は，実際には非常に複雑な時間変化を示すと考えられるが，ここでは，それは最も簡単な理想化された**確率変数**であると仮定する．すなわち，$\{\eta(t)\}$ は**ガウシャン**で**白色ノイズ**とする．つまり，$\langle\eta(t_1)\eta(t_2)\cdots\eta(t_{2n})\rangle$ は $\{\langle\eta(t_i)\eta(t_j)\rangle\}$ の積の和で表され，その相関は**デルタ関数** $\delta(t)$ を用いて，

$$\langle\eta(t)\eta(t')\rangle = 2\epsilon\delta(t-t') \tag{2.3}$$

と書ける．例えば，

$$\begin{aligned}
&\langle\eta(t_1)\eta(t_2)\eta(t_3)\eta(t_4)\rangle \\
&= \langle\eta(t_1)\eta(t_2)\rangle\langle\eta(t_3)\eta(t_4)\rangle \\
&\quad + \langle\eta(t_1)\eta(t_3)\rangle\langle\eta(t_2)\eta(t_4)\rangle \\
&\quad + \langle\eta(t_1)\eta(t_4)\rangle\langle\eta(t_2)\eta(t_3)\rangle \\
&= 4\epsilon^2\{\delta(t_1-t_2)\delta(t_3-t_4) \\
&\quad + \delta(t_1-t_3)\delta(t_2-t_4) \\
&\quad + \delta(t_1-t_4)\delta(t_2-t_3)\}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

と分解される．このようなランダムな力 $\eta(t)$ を含む微分方程式を**ランジュバン方程式**という．この規則で具体的に平均がすべて求められる．

こうして，(2.1) 式を形式的に解いて速さ $v(t)$ の**平均** $\langle v(t)\rangle$ と**二乗平均** $\langle v^2(t)\rangle$ が与えられる．すなわち，

$$\langle v(t)\rangle = \frac{g}{\zeta} + \left(\langle v(0)\rangle - \frac{g}{\zeta}\right)\mathrm{e}^{-\gamma t};\ \gamma = \frac{\zeta}{m}, \tag{2.5}$$

および

$$\langle v^2(t)\rangle = \frac{\epsilon}{m^2\gamma} + \left(\langle v^2(0)\rangle - \frac{\epsilon}{m^2\gamma}\right)\mathrm{e}^{-2\gamma t}. \tag{2.6}$$

ただし，(2.6) 式は $g=0$ の場合に限る（以下の議論に必要なのは，外力が零のときのゆらぎだけである）．

充分時間が経過したときの定常状態の雨滴の速さと運動エネルギーはそれぞれ，

$$\langle v(t)\rangle_{\mathrm{st}} = \frac{g}{\zeta},\ \text{および}\ \frac{1}{2}m\langle v^2(t)\rangle_{\mathrm{st}} = \frac{\epsilon}{2m\gamma} = \frac{\epsilon}{2\zeta} \tag{2.7}$$

と与えられる．こうして，**雨滴の終速度**は，空気の**抵抗係数** ζ と**重力加速度** g の比で与えられる．

以上の議論で，物理的考察から大胆にも空気から受ける力 f を (2.2) 式のごとく 2 つの部分にすでに分けたところが第一の急所である．ところで，これから説明することが，**非平衡統計力学**の出発点となる最大の急所の考え方である．すなわち，ランジュバン方程式 (2.1) の f に入っている 2 つのパラメータ ζ と ϵ とを独立なものとは考えず，物理的な起源がどちらも雨滴と空気分子との衝突にあるのであるから，それらは互に関係していると考える．**定常状態**では，雨滴の運動エネルギーは**等分配則**より $\frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$ であるとすれば，(2.7) 式より

$$\frac{\epsilon}{2\zeta} = \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T,\ \text{すなわち}\ \zeta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\epsilon \tag{2.8}$$

となる．こうして，抵抗係数 ζ が**外力**のないときのランダムな力の強さ ϵ で表されることがわかる．さらに，(2.3) 式で $t'=0$ とおいて，時間 t で積分すると，

$$\epsilon = \int_0^\infty \langle\eta(t)\eta(0)\rangle dt \tag{2.9}$$

となり，結局，

$$\zeta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\int_0^\infty \langle\eta(t)\eta(0)\rangle dt \tag{2.10}$$

という**（第 2 種の）揺動散逸定理**が導かれる．

また，$\gamma t \gg 1$ の条件では，雨滴の速さ $v(t)$ の時

間相関関数が，$g = 0$ のランジュバン方程式 (2.1) より

$$\langle v(t)v(0)\rangle = \frac{\epsilon}{m^2\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t} \quad (t > 0) \qquad (2.11)$$

と与えられるので，これを時間 t で積分すると，(2.8) 式と $\zeta = m\gamma$ より

$$\mu = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\int_0^\infty \langle v(t)v(0)\rangle dt \qquad (2.12)$$

となる．ここで，$\langle v(t)\rangle_{\mathrm{st}} = \mu g (= g/\zeta)$ と表されるので，μ は**移動度**と呼ばれる．この関係式 (2.12) が**第 1 種の散逸揺動定理**である．

さらに，$g = 0$ では，雨滴は空気中で拡散するので，

$$D = \lim_{t\to\infty}\frac{\langle (x(t) - x(0))^2\rangle}{2t};$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(s)ds \qquad (2.13)$$

によって**拡散係数** D を定義すると容易に，

$$D = \frac{\epsilon}{(m\gamma)^2} = \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\zeta} = k_{\mathrm{B}}T\mu \qquad (2.14)$$

が導かれる．これは，**アインシュタインの関係**と呼ばれる．

上のようなゆらぎの時間相関の積分表式の利点は，ランダム変数が**白色**ではなく**カラータイプ**になっても同形の表式になることである．ここで大切なことは，式は線形という簡単なものであるが，その解釈が革新的である点にある．これがアインシュタインの真骨頂である．

以上の議論は**古典力学**の枠の中で行われてきたが，**量子力学**の世界になっても本質的には同じである．ただ，非可換性の効果で，単純な相関関数ではなく，**カノニカル相関**と呼ばれる，もう一つ積分が増えた表式（いわゆる**久保公式**）が現れる[2]．上述の**アインシュタインの理論**は，非平衡系の**線形応答理論**の最初のひな型として，1905 年以来現在に至るまで百年以上にわたって非平衡統計物理学の発展に大変大きな影響を与え続けてきた．

3. 時間変化，保存則およびマスター方程式

時間発展の式を作る際に基本となる拠り所は多くの場合**保存則**である．その中でもエネルギー保存則は最重要な法則である．電荷の保存則も極めて重要である．確率的な現象では，全確率の保存則が基本的である．その帰結として，**マスター方程式**が導かれる．一般的な確率変数を x とする**マルコフ過程**では，それは**時間発展演算子** $\mathscr{L}$ を用いて

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \mathscr{L}P(x,t) \qquad (3.1)$$

の形に表される．ただし，$P(x,t)$ は，系が時刻 t に x という値をとる確率を表す．また，時間発展演算子 $\mathscr{L}$ は積分で表されることが多い．確率保存の要請より，$P(x,t)$ の x に関する全積分は $\mathscr{L}$ の固有関数であり，その固有値は零でなければならない．$\mathscr{L}$ の具体的な形は，どのような問題を，どのような条件で扱うかによって決まってくるので後で議論しよう．

前節で扱ったランジュバン方程式は，一つ一つのブラウン運動（**見本経路**）を追いかける取扱い方であるが，(3.1) 式では，ブラウン運動全体をまとめて扱っていることになる．その結果として，後述の非線形確率微分方程式の場合でも，$P(x,t)$ に対しては線形となる．言わば，空間を広げてものを見ることにより，形式的には取り扱い易い問題に変換される（**理論科学の正則化原理**[1]）．

4. 久保の確率的リュービル方程式とフォッカー・プランク方程式

式 (2.1) を一般化し，確率変数を一般に x として，その時間変化を表すランジュバン方程式が

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \eta(t), t) \qquad (4.1)$$

の形に与えられたとする．この系の確率的な振舞いを調べるのに，(4.1) 式のままで扱う方法に比べて少し大域的な取扱い方が久保によって導入された[3]．一つの見本経路 $\{\eta(t)\}$ に対して，初期値のランダム性に対応して，系が時刻 t で x という値をとる確率 $\rho(x,t)$ を考える．確率の保存より，それは，

$$\frac{\partial}{\partial t} = \rho(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\{F(x,\eta(t),t)\rho(x,t)\} \quad (4.2)$$

という**確率的リュービル方程式**を充たすことにな

る．(4.2) 式の右辺は，確率の流れ $\dot{x}\rho(x,t)$ の発散 (div) を表す．もちろん，この $\rho(x,t)$ を $\eta(t)$ に関して平均をとると $P(x,t)$ となる．すなわち，$P(x,t)=\langle\rho(x,t)\rangle$ の関係を充たす．

この方法は，**確率的な線形応答**を調べるのに大変便利な方法である．ランダムな力 $\eta(t)$ を $\eta(t)+\Delta\eta(t)$ と変化させたときの x の応答 $x(t)+\Delta x(t)$ に対する線形応答は

$$\begin{aligned}\frac{\delta x(t)}{\delta\eta(t')} &= \frac{\partial\Delta x(t)}{\partial\Delta\eta(t')}\\ &= \theta(t-t')F_\eta(x(t'),\eta(t'),t')\exp\\ &\quad \int_{t'}^{t} F_x(x(s),\eta(s),s)ds \end{aligned} \qquad (4.3)$$

で与えられる[4]．ただし，$\theta(t)$ は**ステップ関数**，F_η は η に関する偏微分などを表す．この公式とガウス過程に対して成立する**ノビコフの定理**

$$\langle\eta(t)f(x(t))\rangle=\int_0^t\langle\eta(t)\eta(s)\rangle\left\langle\frac{\delta f(x,t)}{\delta\eta(s)}\right\rangle ds \qquad (4.4)$$

を用いると，$F(x,\eta(t),t)=\alpha(x,t)+\beta(x,t)\eta(t)$ の場合に，次の**一般化されたフォッカー・プランク方程式**が容易に導かれる[2,4]：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\\ &=\left[-\frac{\partial}{\partial x}\alpha(x,t)+\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\beta(x,t)\right]P(x,t).\end{aligned} \qquad (4.5)$$

特に，$\alpha(x,t)=\alpha(x)$，$\beta(x,t)=1$ の場合には，よく知られ次の**フォッカー・プランク方程式**となる：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=(\mathscr{L}_{\rm drift}+\mathscr{L}_{\rm diff})P(x,t);\\ &\mathscr{L}_{\rm drift}=-\frac{\partial}{\partial x}\alpha(x),\ \text{および}\ \mathscr{L}_{\rm diff}=\epsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}.\end{aligned} \qquad (4.6)$$

ただし，$\mathscr{L}_{\rm drift}$ および $\mathscr{L}_{\rm diff}$ はそれぞれ，**ドリフト効果**と**拡散効果**を与える演算子である．上の式の形式的な解は，**指数演算子**を用いて

$$P(x,t)=\exp\left[t(\mathscr{L}_{\rm drift}+\mathscr{L}_{\rm diff})\right]P(x,0) \qquad (4.7)$$

と与えられる．この形式解から $P(x,t)$ の具体的な振舞いを求めるのは，一般には困難である．それは，$\mathscr{L}_{\rm drift}$ と $\mathscr{L}_{\rm diff}$ が互に**非可換**であるためである．ドリフト単独の効果は

$$\begin{aligned}&e^{t\mathscr{L}_{\rm drift}}P(x)=\frac{\alpha(\xi(x,t))}{\alpha(x)}P(\xi(x,t));\\ &\int_{\xi(x,t)}^{x}\frac{dy}{\alpha(y)}=t\end{aligned} \qquad (4.8)$$

の公式で表現される．また，拡散効果は次の積分公式であらわに表される：

$$\begin{aligned}&\exp\left(\epsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)P(x)\\ &=(4\pi\epsilon)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon}\right\}P(y)dy.\end{aligned} \qquad (4.9)$$

さらに，$\alpha(x)=\gamma x$ のように，線形のドリフトに対しては，$A\equiv t\mathscr{L}_{\rm drift}$, $B\equiv t\mathscr{L}_{\rm diff}$ が交換関係

$$[A,B]=\alpha B;\alpha=2\gamma t \qquad (4.10)$$

を充たし，**2 次元リー代数**を構成しているので，式 (4.7) の指数演算子は，次のように分解され，厳密解が (4.8) と (4.9) を用いてあらわに表される[2)]：

$$\begin{aligned}&{\rm e}^{A+B}={\rm e}^{\lambda\tilde{f}(\alpha)B}{\rm e}^{A}{\rm e}^{(1-\lambda)f(\alpha)B};\\ &\tilde{f}(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha}={\rm e}^{\alpha}f(\alpha).\end{aligned} \qquad (4.11)$$

ただし，λ は任意のパラメータである．この分解公式によると，ドリフトが線形の場合には，拡散とドリフトの絡み合いは，$\tilde{\epsilon}\equiv\epsilon f(\alpha)=\epsilon f(2\gamma t)$ というくり込まれたノイズの強さ $\tilde{\epsilon}$ を用いることにより 2 つの効果を形式的に分けて扱うことができる．この扱い方（特に $\lambda=0$ の公式の利用）は，後で述べるように，**不安定点**からの**秩序生成**の問題に近似的に応用できる（ついでながら，任意の非可換な演算子 A,B に対する指数演算子 e^{A+B} の**高次分解公式**が筆者によって**漸化式の方法**で任意の次数まで求められている[1,2)]）．

式を立てる過程を議論するのが目的の本稿で解の表し方まで立ち入ったのは，それを解くことによって現象の本質を引き出せるような式の立て方を解説したいからであり，そのためには，その表現形式を工夫することが重要だからである．確率変数 x の時間変化を表現するランジュバン方程式よりも，x の分布を表す $P(x,t)$ に関する偏微分

方程式であるフォッカー・プランク方程式のほうが，大域的な特徴を捉えるには便利である．しかも，一変数の微分方程式より多変数の微分方程式へと，記述する空間を拡張して扱うと，形式的には線形方程式となり，見通しが良くなり，取り扱い易くなる[1)]．2つ以上の効果が絡み合って起こる現象の本質，すなわち**相乗効果**[2)]を見出すには，それぞれの効果を与える**線形演算子**（上の例では $\mathscr{L}_{\mathrm{drift}}$ と $\mathscr{L}_{\mathrm{diff}}$）の交換関係を調べ，それを上手く処理しなければならない．

5. 秩序生成の理想化された定式化と漸近評価

現実的な秩序生成には無限個の変数（すなわち自由度）が関与している．したがって，それを理論的に解明するためには，無限個の連立（微分）方程式を扱わなければならない．少しでも自由度を減らせば，それだけ取扱いは楽になる．その標準的な処方箋は**くり込み群の方法**である[2)]．すなわち，短波長の熱的なゆらぎを先に消去して（くり込んで），より長波長の時間発展方程式にその効果を取り込む．ここでは，これ以上深く立ち入ることはやめて，最終的に全体の変化を特徴づける巨視的な**秩序パラメータ**一個に着目した，いわば，理想化された方程式を考えることにする．粒子数 N で割って規格化された秩序パラメータを x とし，その**発展方程式**が

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(x) + \eta(t) \tag{5.1}$$

で表される場合を考える．しかも，系の対称性から，$\alpha(x)$ は x の奇関数とする．それを x でテーラー展開して，**相転移**が記述できる最低次までとることにすると，ランダウ理論に対応して，$\alpha(x) = \gamma x - g x^3$ の形が秩序生成を記述するのに意味のある最も簡単な式となる（相転移を記述する**熱力学的ポテンシャル** $U(x)$ を $U(x) = -ax^2 + bx^4$ と4次までの展開式で表せるものとし，変数 x の時間変化に対する熱力学的な力は $-dU(x)/dx$ に比例するとすれば，(5.1) 式が得られる）．このようにぎりぎりまで単純化しても，(5.1) のランジュバン方程式を厳密に解くことは困難である．

この式の物理的意味について，まず議論しよう．アインシュタインのブラウン運動の理論で使われた速さ v に関するランジュバン方程式 $dv/dt = -\gamma v + (1/m)\eta(t)$ と対比してみると，(5.1) 式の形は，非線形項を除くと，全く同じである．しかし，式の解釈が全く異なる[1,2,4,5)]．(5.1) 式の変数 x は，巨視的な秩序変数（の規格化されたもの）を表しているので，そこに現れる3つのパラメータ γ, g および ϵ は全く独立な値をとる．しかも，1次の項の符号が逆になっている．(5.1) 式では，無秩序状態 $x = 0$ が不安定な状態に対応している（相転移温度より低温側を考えている）ので，1次の項の符号は正である（$\gamma > 0$）．また，安定性の条件より，3次の項の係数は負である（$g > 0$）．

この解説では，方程式の解き方まで深入りしなくともよいことになっているが，方程式の特徴とその解き方が，この問題においては特に密接な関係にあるので，簡単に要点だけ説明したい．上に述べたように，式 (5.1) すなわち，

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - g x^3 + \eta(t) \equiv \alpha(x) + \eta(t), \tag{5.2}$$

または

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\alpha(x) + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) P(x,t) \tag{5.3}$$

に現れるパラメータ ϵ, g, γ は独立な値をとるので，γ を一定に保ったまま，ϵ や g を変化させて，秩序生成の本質を浮彫にするような漸近評価をすることが肝要となる[1,2,4,5)]．パラメータ ϵ に関して**摂動展開**して，x^2 と分布関数 $P(x,t)$ との積の，x に関する積分で定義される平均 $\langle x^2(t) \rangle$ を，初期条件 $x(0) = 0$（または $P(x,0) = \delta(x)$）として2次まで求めてみると，定常解 $\langle x^2 \rangle_{\mathrm{st}} = \gamma/g$ として，

$$\langle x^2(t) \rangle = \langle x^2 \rangle_{\mathrm{st}} \left[\tau(1 - \mathrm{e}^{-2\gamma t}) - 3\tau^2(1 - 4\gamma t \mathrm{e}^{-2\gamma t} - \mathrm{e}^{-4\gamma t}) + \cdots \right] \tag{5.4}$$

となる．ただし，

$$\tau = \frac{g\epsilon}{\gamma^2}\mathrm{e}^{2\gamma t} \tag{5.5}$$

である．時間 t が大きくなると，(5.4) 式の中にあ

る t を含む項は無視できて，(5.4) 式は τ だけの関数になる．すなわち，$\epsilon \to 0$（または $g \to 0$）の極限と同時に $t \to \infty$ の極限をとり，かつ τ を一定にするような**非線形スケーリング**（scaling）**極限**では，$\langle x^2(t)\rangle/\langle x^2\rangle_{\rm st}$ は τ のみの関数になる．実際，このスケーリング極限で有限に残る項を ϵ の無限次まで全部足し合わせると，次のような積分（**ボレル和**；収束半径零の級数和）で表せる[2,4,5]：

$$\frac{\langle x^2(t)\rangle}{\langle x^2\rangle_{\rm st}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} {\rm e}^{-\xi^2/2}\frac{\xi^2\tau}{1+\xi^2\tau}d\xi. \quad (5.6)$$

秩序生成の目安を与える物理量は $\langle |x(t)|\rangle$ で与えられる（方程式 (5.2) または (5.3) の対称性より $\langle x(t)\rangle \equiv 0$ である）．これは次式で表される（$\langle |x|\rangle_{\rm st} = (\gamma/g)^{1/2}$ として）：

$$\frac{\langle |x(t)|\rangle}{\langle |x|\rangle_{\rm st}} = \sqrt{\frac{2\tau}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{{\rm e}^{-x}}{\sqrt{1+2\tau x}}dx. \quad (5.7)$$

これらを用いて，ゆらぎ $\sigma(t)$ は $\sigma(t) = \langle(|x(t)| - \langle |x(t)|\rangle)^2\rangle = \langle x^2(t)\rangle - \langle |x(t)|\rangle^2$ で与えられる．これらの式から，秩序ができるのは，τ が 1 のオーダーになるところ，すなわち，**オンセットタイム** $t_{\rm O} \sim (1/2\gamma)\log(\gamma^2/g\epsilon)$ のところになる．したがって，ϵ や g が大きいほど $t_{\rm O}$ は小さくなり早く秩序ができる（秩序ができ易くなる）．これを**秩序生成における相乗効果**という[1,2,4~6]．ちなみに，秩序パラメータ $\langle |x(t)|\rangle$ とゆらぎ $\sigma(t)$ の時間変化を示すと図 1 のようになる[5,6]．時間 $t = 0$ で $\tau = 0$ になるように補正した"スケーリング時間"としては，(5.4) からわかるように，$\tilde{\tau} = \tau(1 - \exp(-2\gamma t))$ を用いればよい．図 1 からわかるように，秩序ができる近傍では，ゆらぎが大きくなる．これは大変一般的な現象である（**ゆらぎ増大法則**）[1,2,4~6]．

上のようなスケーリング解特に解析的な解を与える分布関数 $P_{\rm sc}(x,t)$ は，線形の場合の分解公式 (4.11) を A が非線形の場合 $A = (-t\partial/\partial x)\alpha(x)\cdot$ に拡張すればよいことがわかっている[2,5]．それを方程式の形に表すと，

$$\frac{\partial}{\partial t}P_{\rm sc}(x,t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x}\alpha(x) + \epsilon\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\sim}\right]P_{\rm sc}(x,t) \quad (5.8)$$

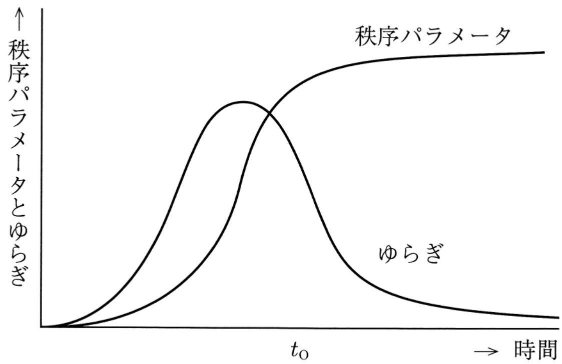


図 1　秩序生成時におけるゆらぎの増大（$t_{\rm O}$：オンセットタイム）．

となる．ただし，**くり込まれた拡散演算子** $(\partial^2/\partial x^2)^{\sim}$ は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\sim} = {\rm e}^{-2\gamma t}{\rm e}^{A}\frac{\partial^2}{\partial x^2}{\rm e}^{-A};\ A = -t\frac{\partial}{\partial x}\alpha(x) \quad (5.9)$$

で与えられる．これは，$\alpha(x) = \gamma x - gx^3$ の場合でも非常に複雑な演算子である．このように，**秩序生成のメカニズム**を本質的に表すと考えられるスケーリング解を与える方程式は，もとのフォッカー・プランク方程式よりもはるかに複雑なものとなる．

方程式も簡単で，その解も興味深くかつ解析的に解ける非線形の問題は，ソリトンのようにごく限られている．むすびとして言うならば，くり込み群の方法のように，現象の本質的部分を抜き出すような方程式の立て方をすることが肝要である．

この原稿は急病の妻謙子の看病中に完成させた．

参考文献

1)　鈴木増雄,『活力を与える「物理」』(オーム社, 2007 年).
2)　鈴木増雄，『統計力学』（岩波書店，2000 年）．
3)　R. Kubo, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 174.
4)　M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys. Supple.* **69** (1980) 160.
5)　M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976) 77, 477; **57** (1977) 380; *J. Stat. Phys.* **16** (1977) 11, 477; *Adv. Chem. Phys.* **46** (1981) 195.
6)　鈴木増雄,「物理探求の楽しさ」:『新物理の散歩道』の第 5 集，233–246（筑摩書房，2010 年）．

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）



数学の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第17回

数学との出会いからDonaldson–Tian–Yau予想まで

満渕　俊樹

本稿では小生と数学の長年にわたっての係わりを述べようと思います．個人的なことを言って申し訳ありませんが，父が高校で数学を教えていた関係で，小生は中学生の頃から漠然と数学に親近感を持っていました．数学を直接教わったのは小学生のとき，しかも母のほうからで，環境的には自宅には数学や物理学の専門的な書物が本棚に並んでおり，それが知らず知らずのうちに小生に影響するという環境で育ちました．ただ自身ではっきりと数学者になろうと思ったのは大学に入学してからのことです．

1. 東大生時代

大学に入学直後，クラス担任でもあった伊原信一郎先生にお願いして出席していただき，クラスの有志でポントリャーギンの『連続群論』を輪読しました．ただこれも入学後半年もしないうちに安田講堂の封鎖とともに大学紛争が始まり，全く勉学に手がつかない形で1年間が経過しました．実際この大学紛争で傷ついて人生を狂わせてしまった同期生が随分いたと思います．授業再開後，その解放感からか2年生後半に習った数学が今でも深く印象に残っています．例えば線形代数の授業は伊原康隆先生が担当され「線形代数は自習すれば良い」ということで内容的には群論の授業に切り替わり，シローの定理が終わったところで中途で海外出張されました．そしてピンチヒッターの先生からは有限群の表現を習いましたが，いずれも興味深い授業でした．また線形代数の演習を飯高茂先生が，関数論の演習を新谷卓郎先生が担当され，毎回面白い演習問題を出していただいたことはいまも記憶に強く残っています．

その後，駒場から本郷の理学部数学科に進学し本格的に数学を学ぶことになりましたが，この頃はまだ小平邦彦先生がご健在で複素多様体の研究が熱気をもって行われていた頃でした．その影響もあって卒業研究のセミナーでは，上野健爾先生の指導の下に，藤田隆夫，前原和寿，宮岡洋一らの3氏とともに，小平先生の米国での講義に基づいたMorrow著の複素多様体の新刊本とClemens–Griffithsの“The intermediate Jacobian of the cubic threefolds”を輪読しました．後者の論文は随分難しかったという記憶があります．当時はセミナーのかけもちも多く，我々のセミナーにはしばしば桂利行氏も加わって一緒に学んだことを覚えています．小生にとっては，実にこのセミナーのおかげで強力な代数幾何的方法の一端に触れることができ，後々の研究者生活においても非常に有益で貴重な経験を得ることになりました．

2. バークレー時代

その後，カリフォルニア大学バークレー校の大学院に進学し，数学を基礎から学び直すとともに，小林昭七先生の下で複素微分幾何を学びました．時代背景として日本が高度経済成長をしていたということもあって，分野を問わず多数の優秀な日本人が留学しており，例えば統計学の三浦良造氏や数理経済学の丸山徹氏とも知り合う機会を得ました．ところで米国の大学で博士の学位を取得するには，まず語学試験と資格試験（qualifying examination）を通ることが必要とされ，バークレー校の場合には，語学試験で2カ国語の試験にパスし，さらに資格試験で代数，幾何，解析の3つの面接試験にパスすることが義務付けられていました．これらの試験は精神的には結構きつかったのですが，何とかクリアしました．ところで小生の学位論文のテーマですが，小林先生から「負曲率の世界につながる小林双曲性に関する話題を選ぶか，正曲率の世界を象徴するFrankel予想を選ぶか」と聞かれ，即座にFrankel予想を選ぶと答えました．いま振り返ってみると，これこそ小生の後々の研究の方向性を大きく決める出来事でした．正の正則双断面曲率をもつコンパクト連結複素多様体は複素射影空間であろうというのがFrankel予想ですが，小林–落合の先行結果に基づき3次元の場合に肯定的解答を与えたというのが，小生の学位論文です．その証明の際に，代数群の作用を用いたのですが，トーリック幾何を含め代数群の基本的なことについて，その頃バークレーにおられた佐武一郎先生に色々と教えていただきました．実は学位論文の内容自体は博士課程の4年目に完成していたのですが，勉強のため学位取得を1年間遅らすことにしました．また，ちょうどこの頃バークレー校数学科の講師をされていたS.S. Roan氏に数学の話相手になっていただくとともに，学問のみならずサンフランシスコに一緒に遊びに行くなど色々とお世話になりました．

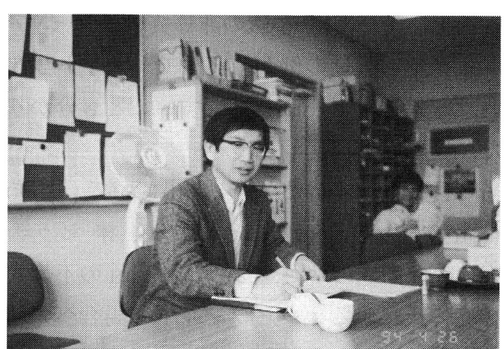
Frankel予想そのものは，これをもう少し一般化したHartshorne予想が3次元のときに森–隅広によって解かれ，時間的にはかなり後のことになりますが，一般次元の場合にはFrankel予想がSiu–Yauにより，またHartshorne予想が森重文氏によって最終的に解決されました．

3. ボンから阪大へ

バークレーで学位を取得した後，竹内勝先生の引きもあって阪大の教養部に就職することができましたが，就職までの半年間西独のボン大学SFB40で数学修行をする機会を得ました．この前後にS.T. Yauがカラビ予想をリッチ曲率が非正のときに解決し，宮岡–Yauの不等式なども話題になっていましたが，ボン大学では上野先生や宮岡氏と再会するとともに，微分幾何のセミナーではYauのカラビ予想解決の紹介を何回かの講演でさせていただきました．このとき，初めて複素モンジュ・アンペール方程式を本格的に勉強したのですが，今から考えるとこの経験が後々大きく活きてくることになりました．またボンとのつながりもでき，これ以降度々ボンを訪れるようになりました．

4. 阪大教養部にて

小生がボンから帰国した頃の阪大は，微分幾何があたかも空気のように感じられるほどで，知らず知らずのうちにその空気に慣らされていきました．また当時籍を置かせていただいた教養部は，非常に自由で活発な雰囲気で，今吉洋一氏，行者明彦氏，小磯憲史氏，谷崎俊之氏，野口潤次郎氏，平峰豊氏，眞鍋昭治郎氏らの有望な若手数学者が



阪大教養部にて（1994年）．

ずらりと揃っていたので幸運でした．

一方，上野先生，藤木明氏，丸山正樹氏，宮西正宜氏らが京大で代数幾何のセミナーを開いていて，それにも顔を出させていただいたのですが，そこで S.K. Donaldson の論文 “Anti self-dual Yang–Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles” が話題になり，詳しく読む機会を得ました．実はこの論文を読んだことがきっかけとなり，コンパクトな連結複素多様体上の同一のケーラー類に属するケーラーポテンシャル全体のなす空間 Ω が自然なリーマン構造や接続をもつことや，当時二木昭人氏により見出された二木障害を積分する形で「K–エネルギー写像」を定義することができました．

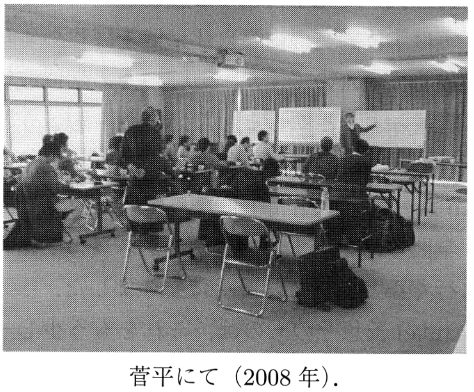
この時代はフィールズ賞受賞者の Yau の結果に触発されて，リッチ曲率が正の場合や非コンパクトあるいは特異性をもつケーラー・アインシュタイン計量の研究をしようという機運が高まっていましたが，ベクトル束に関する小林–ヒッチン対応についても存在問題はまだ未解決でした．まず坂根由昌氏によってリッチ曲率が正の非等質ケーラー・アインシュタイン計量の例が見出され，ケーラー・アインシュタイン計量が豊富な体系であろうことが示唆されました．この頃小生は板東重稔氏と共同で，パラメター付きモンジュ・アンペール方程式を通常とは逆向きに解くことで，リッチ曲率が正の場合にもケーラー・アインシュタイン計量が（正則自己同型群の単位元連結成分の作用を法として）一意的であることを示しましたが，この結果が G. Tian に少なからぬ影響を与えたと聞きます．また坂根–小磯の非等質ケーラー・アインシュタイン計量の例が，実はモーメント写像を用いた定式化を用いると見やすいことも分かりました．

当時目覚ましい結果が続々と出ていて (1) Donaldson や Uhlenbeck–Yau による小林–ヒッチン対応の存在問題の解決，(2) 宮岡–Yau の不等式の小林亮一氏によるオービフォルドの場合への精密化，(3) リッチ曲率が正のケーラー・アインシュタイン計量の Y.-T. Siu, Tian–Yau, A. Nadel らによる存在例，(4) Kronheimer–中島の結果やアインシュタイン多様体の崩壊に関する板東–加須栄–中島の結果，(5) Nadel による乗法イデアル層の辻–Siu による代数幾何への応用など枚挙にいとまがありません．ただ，これら結果が一段落した後には，進展のない重苦しい冬の時代が何年も続きました．

5. 重点化以降の阪大にて

冬来たりなば春遠からじと言いますが，ちょうど日本の大学が大学院重点化で揺れていた頃を境にして，やっと沈滞を破って次の発展につながる結果が現れ始めました．それが Tian による “Kähler–Einstein metrics with positive scalar curvature” であり，ベクトル束とは別の観点からケーラー–アインシュタイン計量の存在と多様体の安定性を論じた最初の本格的な論文でした．この論文で初めて微分幾何的な K–安定性の概念が示され，後々の Donaldson の論文 “Scalar curvature and stability of toric varieties” でテスト配置を用いた代数幾何的な K–安定性の概念が導入されたのです．

ちょうどこの頃から大沢健夫，小林亮一，辻元，板東重稔，藤木明，二木昭人，野口潤次郎ら各氏の協力を得て菅平で「国際複素幾何シンポジウム」を毎年開くようになりました．この研究集会は今年度ですでに 15 回目を数えますが，毎回各日本人参加者が外国人数学者に呼びかけ，例えば X. Chen, Gauduchon, Huckleberry, J.-M. Hwang, LeBrun, Mok, Roan, Siu, Sparks, Tian, Winkelmann, Yeung らを招待講演者として招聘



菅平にて（2008 年）．

し色々と講演をしてもらいました．このことが結果的に我々の研究全体の底上げにもなったと思います．こうした努力もあって，小生の研究状況も少しずつ改善していきました．

ケーラー・アインシュタイン計量の一般化としてはケーラー・リッチソリトンや端的ケーラー（extremal Kähler）計量などが知られていますが，これらの一意性がかなり大きな問題になったことがあります．特にケーラー・リッチソリトン関連の一意性についてはTianのグループと競争となり，結果的にはTian–Zhuの結果が先に出て決着がつきました．小生はこの問題を，ある特殊なタイプの共形ケーラー構造のアインシュタイン性の一意性問題として捉えて，少し遅れてより一般な形の結果を出したのですが，この競争経験から少なからず自信を得ました．またこれが契機となってZhu氏との交流が始まりましたが，その後彼はWang–Zhuの結果でトーリック・ファノ多様体上のケーラー・アインシュタイン計量の存在問題を解決しました．一方，端的ケーラー計量の一意性については，小生がかつて研究していた前述の Ω の幾何に光が当たる形でChen氏が Ω の2点間の $C^{1,1}$ 測地線の存在を示し，さらに定スカラー曲率ケーラー計量の場合に部分的な結果を出すとともに，最終的にはChen–Tianが端的ケーラー計量の一意性を示すことに成功しました．

6. 小林–ヒッチン対応の多様体版

上記のTianの結果からも分かるように，カラビ予想の自然な一般化として「偏極射影多様体において偏極類が定スカラー曲率ケーラー計量（あるいは端的ケーラー計量）を許容するということは，その偏極射影多様体の何らかの意味のGIT安定性と対応するであろう」という予想を得ます．これはベクトル束の場合の小林–ヒッチン対応との類似から，小林–ヒッチン対応の多様体版（Yauの予想）と呼ばれ，未解決の難問として知られています．この予想は偏極射影多様体に対して

(a)　[安定性予想] 定スカラー曲率ケーラー計量の存在から何らかのGIT安定性を導くことと，



神戸にて（筆者は前列左から3番目；2007年）．

(b)　[存在問題] 何らかのGIT安定性から定スカラー曲率ケーラー計量の存在を導くこと

の2つの部分に分かれ，現在は(b)のほうに研究の中心が移っていますが，その当時は(a)が中心的課題でした．例えば種数2以上の代数曲線や豊富な標準束をもつ代数曲面上にはケーラー・アインシュタイン計量が存在しますが，前者はマンフォードの結果でChow安定であるとともに後者はGiesekerの結果により漸近Hilbert安定となります．こうした安定性を，微分幾何的概念である定スカラー曲率ケーラー計量の存在から導けというのが予想(a)です．

ところでTianの結果がきっかけとなって，L. Weng氏と共同で(a)を考察し，その際彼からZhangの論文 "Heights and reductions of semi-stable varieties" を教わりChow normを学ぶ機会を得ました．そして安定性予想については漸近性によらない方向で結果が得られたと思っていたのですがギャップがありました．一方でCatlin–Tian–Zelditch–Luの漸近的ベルグマン核に関する結果について小松玄氏や平地健吾氏から色々と教えてもらい，定スカラー曲率ケーラー計量がbalanced metricとつながっていることが期待されことから(a)のある種の解答が得られるかも知れないという予想についてKIASや幾何学シンポジウムで講演しました．またこれと関連しChow normの2次微分に関するPhong–Sturmの仕事と同等な結果も独立で得ましたが，これについてはプレプリントサーバに先に投稿した二人に先を越されてしまいました．さらに2001年にはDonaldson

が，論文 “Scalar curvature and projective embeddings” を出版し，偏極射影多様体の正則自己同型群が離散的という仮定の下に，定スカラー曲率ケーラー計量の存在が漸近 Chow 安定性を導くという画期的な結果を示してしまいました．これで小生は万事休すというところでしたが，気をとり直して Donaldson の結果を正則自己同型群が一般の場合にまで拡張しました．

7. Donaldson–Tian–Yau 予想

以下，偏極射影多様体 (M, L) はすべて非特異連結とし，必要に応じて L をその（正整数による）適当なベキで置き換えることにします．対 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ が (M, L) のテスト配置であるとは，（非特異とは限らぬ）既約代数多様体 $\mathcal{M}$ から複素平面 $\mathbf{C}$ への $\mathbf{C}^*$-同変な射影全射 $\pi : \mathcal{M} \to \mathbf{C}$ と，対応する相対的に大変豊富な正則直線束 $\mathcal{L}$ が以下の 2 条件をみたすときにいうことにします．

(1) $\mathcal{M}$ への $\mathbf{C}^*$-作用は $\mathcal{L}$ への $\mathbf{C}^*$ の正則な束作用にリフトする．

(2) $(\mathcal{M}_t, \mathcal{L}_t) \cong (M, L)$, $t \neq 0$.

ただし $\mathbf{C}^*$ は複素平面 $\mathbf{C}$ に通常の複素数の積で作用することにする．次に $N_m := \dim H^0(M, L^m)$ とおき，w_m を $\det H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0^m)$ への $\mathbf{C}^*$-作用の重みとします．このとき十分大きな正整数 m に対して有理数 $F_i = F_i(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ が存在して

$$w_m/mN_m = F_0 + F_1 m^{-1} + F_2 m^{-2} + \cdots$$

という漸近展開を得ますが，$F_1 = F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ をテスト配置 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ の二木不変量と呼びます（Donaldson）．前節の小林–ヒッチン対応の多様体版で，対応する安定性が K–安定性であろうというのを Donaldson–Tian–Yau 予想と呼びます．すなわち

予想（Donaldson–Tian–Yau）：偏極射影多様体 (M, L) の K–安定性と，偏極類 $c_1(L)$ での定スカラー曲率ケーラー計量の存在は同値．

ただし (M, L) が K–安定であるとは，(M, L) のいかなるテスト配置 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ に対しても，その二木不変量 $F_1(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ は零以下で，しかも零に等しいのは $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ が積配置すなわち $\mathcal{M}$ が（群作用を込めず）直積 $M \times \mathbf{C}$ に限るときに言います．漸近 Chow 安定性と漸近 Hilbert 安定性の同値性が示されることもあって，小生は本命の安定性は，漸近 Chow 安定性，あるいはその漸近 Chow 安定性からイソトロピー群の有限性を除いたものと最初は思っていたのですが，実際に色々と計算してみると K–安定性のほうが定スカラー曲率ケーラー計量の存在に非常に近いということが分かってきたので，最近は Donaldson–Tian–Yau 予想に熱心に取り組むようになりました．前節と同様にこの予想を (a) 安定性予想と (b) 存在問題の 2 つの部分に分けますと，(a) に関しては Stoppa が偏極射影多様体 (M, L) の自己同型群が離散的な場合に肯定的に解決し，さらに自己同型群が一般の場合にも肯定的であるという結果を小生は現在プレプリントサーバに発表中です．こういうこともあって，最近皆の関心は存在問題 (b) のほうに移ってきています．そこで，以下では存在問題について書くことにします．

8. 定スカラー曲率ケーラー計量の存在問題

この存在問題に関連して最近話題になったことを一つ書きます．例えば偏極射影多様体 (M, L) が K–安定でしかもその自己同型群が離散的であったと仮定します．このとき前節の (b) を仮定すると $c_1(L)$ に属する定スカラー曲率ケーラー計量が存在することになるので，Donaldson の結果から (M, L) は漸近 Chow 安定となるはずですが，これは「自己同型群の離散性の仮定の下に K–安定性から漸近 Chow 安定性が導かれる」ということを意味します．もう少し一般的な設定にして，以下の問題を考えてみます．

(1) 自己同型群の離散性を仮定せずに，K–安定性から漸近 Chow 安定性が導かれるのか？

(2) 自己同型群の離散性を仮定し，M がより一般にオービフォルドである場合に，K–安定性から漸近 Chow 安定性が導かれるのか？

実は，最近この両方の問題が否定的に解決されました．(1) については，トーリックファノ 7 次元

多様体で Nill–Paffenholtz の例と言われるものの中に反例を二木氏のグループ（小野–佐野–四ツ谷）が見つけました．一方 (2) についても，標準偏極の場合に尾高悠志氏が反例を見つけました．これらの事実は存在問題に対してやや否定的な気持ちを起こさせますが，小生の個人的な意見を言いますと，これら反例は単に問題が非常に微妙であるということを示しているだけで，前節の (b) は正しいのではないかと思っています．この存在問題 (b) には，Chen–Donaldson が共同で取り組んでいると聞きますし，Tian も並々ならぬ興味をもっていると聞きます．ベクトル束の場合は，今から 25 年以上前に Donaldson や Uhlenbeck–Yau によって存在問題が解決しましたが，多様体版のほうは，未だに解決を拒み続けています．

さらに，端的ケーラー計量の存在がいかなる安定性と対応するのかというのも興味深い問題です．これは「相対 K–安定性」が対応すると思われますが，それを以下に説明しようと思います．

9. 端的ケーラー計量の存在問題

端的ケーラー計量の存在に関係する安定性は，相対 Chow 安定性と相対 K–安定性の両方が知られていますが，前者は小生が，後者は Székelyhidi が導入しました．以下では Székelyhidi が定義したものを小生流に修正したものを用いることにします．偏極射影多様体 (M, L) に対して，その自己同型群の簡約成分の中心 Z をとります．Z の単位元連結成分の適当な有限被覆 Z' の $SL(H^0(M, L))$ における中心化群の中で Z' と Lie 代数レベルで直交するような元全体からなる部分群を $Z^{\perp}$ とします．一般にテスト配置は $SL(H^0(M, L))$ の各 1-パラメター群に付随するものと考えられることが知られています．そこで $Z^{\perp}$ の各 1-パラメター群に付随するテスト配置 $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ のみを考えたときに $F_1(M, L)$ が常に零以下で，しかも零になるのは積配置であるときに限る場合に，(M, L) が（Z に関して）相対 K–安定であるということにします．このとき Donaldson–Tian–Yau 予想の端的ケーラー計量版として次が得られます．

予想：偏極射影多様体 (M, L) の相対 K–安定性と，偏極類での端的ケーラー計量の存在は同値．

この予想は Donaldson–Tian–Yau 予想と，全くパラレルに構成できますので，もし一方が肯定的に解決するのならば，他方もほとんど同様に解けるべきものと予想しています．

10. 結語

Donaldson–Tian–Yau 予想の意義は，幾何学における複雑な概念「定スカラー曲率ケーラー計量の存在」を代数的な概念「K–安定性」に還元させるところにあります．その意味で，この予想が解決したときの次のステップとしては，特異性のある場合もこめて K–安定性（または相対 K–安定性）の代数幾何的研究が非常に重要だと考えられます．例えば K–安定になるための条件としては，Ross–Thomas の意味での slope 安定性という必要条件が知られていますが，適当な十分条件が是非欲しいところです．

今までの研究を振り返ってみると，各節目でタイムリーなことが色々と起こっていることに気がつきます．東大とバークレーでは研究というよりも，まだ勉強のほうが主でしたが，たまたま Frankel 予想というものがあったために小林先生や佐武先生のご助力もあって，研究らしいものを何とかすることができました．その結果就職にも恵まれました．その後阪大に就職してからは，京大でのセミナーに出させていただいたおかげで Donaldson の論文に出会うことができ，また板東氏らの協力も得て初期の一連の仕事をすることができました．その後，苦しい日々が何年間か続きましたが，Tian のみならず Donaldson の参入という事態になったことが却って分野の活性化につながり，一方では二木氏という競争相手にもめぐまれて，現在につながる一連の仕事ができるようになりました．ここで皆様に深く感謝いたします．

（まぶち・としき，大阪大学大学院理学研究科）

定期別冊統合のお知らせ

小誌『数理科学　定期別冊』は，2010 年 10 月号より臨時別冊に統合して刊行してゆく所存でございます．読者の皆様には定期別冊発刊以来，多大なご支援をおよせ頂き，永い間ご購読賜りましたことは誠に有難く，心から御礼を申し上げます．なお，向後とも『数理科学』月刊誌・臨時別冊をご愛顧頂きますよう，よろしくお願い申し上げます．

2010 年 6 月

株式会社　サイエンス社

特　集（2010 年 8 月号予告）

力の統一に向けて

四つの力から最終理論へ

本体 952 円

巻頭言	村山　斉
重力	佐々木　節
光と電子	仁尾真紀子
弱い力	日笠　健一
強い力と色のゲージ理論	初田　哲男
電弱統一理論	浜口　幸一
大統一理論	久野　純治
余剰次元	野村　泰紀
統一理論としての超弦理論	渡利　泰山
[コラム]	大栗　博司
[インタビュー]	村山　斉

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．

中学生の頃だったと思いますが，私が「行列」という言葉を聞いたときは「あの町で見られる人が並んでいる様のことかな」ということが念頭に浮かびました（のちにそれは今回取り上げている「行列」とは別のものだとわかるわけですが）．やがて，月日が経って高校で初めて行列を学んだときに，これは一体どういうことに使えるのだろうと思いました．

今回の特集記事を見ると，行列を使うと物事が整然とわかりそうだ，ということに気づくのではないかと思います．また，行列が物理学の様々な分野で使われているのだな，ということもわかります．

今年，大学に入学された方の中には行列が主に登場する線形代数の講義がよくわからない，とか行列は一体どういう場面で使うのだろうか，と思われている人もいるかもしれません．あるいは，どんな本で勉強するといいのか，と思われている人もいるかもしれません．是非，今回の特集を手に取って読んでほしいと思います．また，その先のことも知りたい，と思ったら各先生方が挙げられている，あるいはその先生ご自身が書かれている本を手にとって読んでみると，より理解が深まり，講義でピンとこなかったことなどがすっきりとするのではないかと思います．　(R)

数　理　科　学　7月号

2010 年 7 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁